11. ELEMENTE der RELATIVISTISCHEN MECHANIK
(– Spezielle Relativitätstheorie –)

11.1 RAUM und ZEIT in der nichtrelativistischen (NEWTON – LAGRANGE – HAMILTON-) Mechanik

(1) Es gibt eine ABSOLUTE ZEIT t, die unabhängig vom physikalischen Geschehen gleichförmig abläuft.

(2) Es gibt einen (davon unabhängigen) ABSOLUTEN RAUM, dargestellt durch den 3-dimensionalen EUKLIDSCHEN Raum $\mathbb{R}^3$.

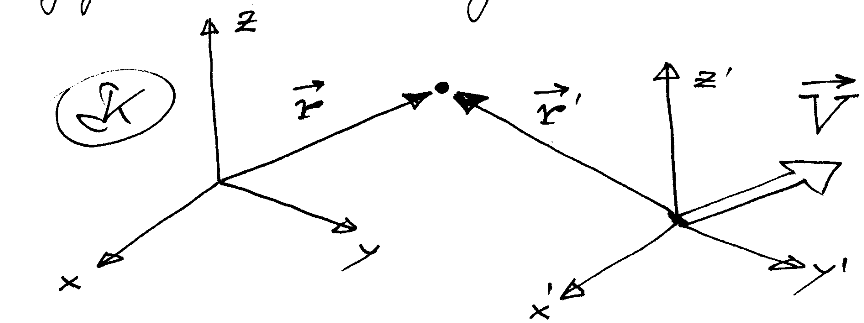
- Abstand zweier Punkte:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} : \quad s = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

- Ist K ein INERTIALSYSTEM, d.h. ein Bezugssystem, in dem sich ein (kräftefreies) Teilchen geradlinig und gleichförmig bewegt, und K' ein Bezugssystem, das sich relative zu K mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so ist auch K' ein INERTIALSYSTEM

11.2 GALILEI-Transformation

- gegeben zwei Inertialsysteme K und K':



$$K: \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \right\}$$
$$K': \left\{ \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \ \vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} \right\}$$

Zeit t ist absolut

- Geschwindigkeiten und Ortsvektoren in K und K':

$$\boxed{\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V}, \quad \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V} t} \quad \text{mit } \vec{V} = \text{const}$$

(GALILEI-Transformation)

- Transformation von IMPULSEN

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \vec{p}\,' = m\vec{v}\,' \Rightarrow \boxed{\vec{p}\,' = \vec{p} - m\vec{V}}$$

- Transformation der ENERGIE

$$E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + E_0, \quad \text{wobei } E_0 = E(\vec{p} = 0)$$

$$E' = \frac{\vec{p}\,'^2}{2m} + E_0 = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + E_0 - \vec{p}\cdot\vec{V} + \frac{m}{2}\vec{V}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E' = E - \vec{p}\cdot\vec{V} + \frac{m}{2}\vec{V}^2}$$

11.3 Das EINSTEINsche RELATIVITÄTSPRINZIP

- Grenzgeschwindigkeit

⇒ Es existiert eine nicht überschreitbare MAXIMALGESCHWINDIGKEIT für die Ausbreitung von Signalen oder Bewegung von Teilchen im Vakuum:

LICHTGESCHWINDIGKEIT
$c = 2.998 \cdot 10^{8}\, m\, sec^{-1}$

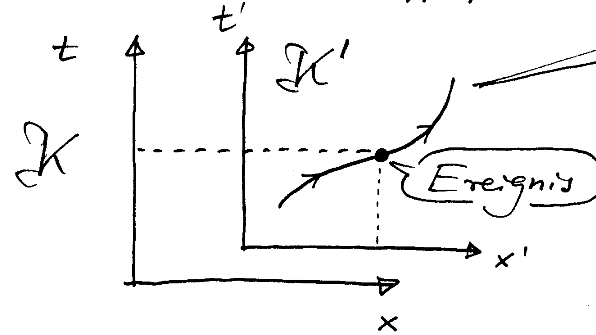
Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen im Vakuum.

⇒ Die LICHTGESCHWINDIGKEIT c ist in allen INERTIALSYSTEMEN gleich!

⇒ Konsequenz: die ZEIT t verliert ihren absoluten Charakter.

11.4 EREIGNISSE in der RAUM-ZEIT

- Ein EREIGNIS wird beschrieben durch einen Vektor $(t, \vec{x})$ in 4 Dimensionen
- Betrachte wieder zwei Inertialsysteme:



WELTLINIE
zur Darstellung der raumzeitlichen Entwicklung eines Systems

- Konkretes Beispiel: Lichtsignal, ausgesendet am Punkt (t_1, x_1, y_1, z_1) und empfangen am Punkt (t_2, x_2, y_2, z_2)

⇒ im System K: $c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

$$c(t_2-t_1) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

⇒ im System K': $c = \frac{\Delta s'}{\Delta t'}$

$$c(t_2'-t_1') = \sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2}$$

Konstanz der Lichtgeschw.

⇒ mit der universellen Lichtgeschwindigkeit c gilt also für ein Lichtsignal

$$c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2 =$$
$$= c^2(\Delta t')^2-(\Delta x')^2-(\Delta y')^2-(\Delta z')^2 = 0$$

in allen BEZUGSSYSTEMEN

- allgemeiner: der Abstand zwischen zwei Ereignissen:

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2-(\Delta z)^2$$

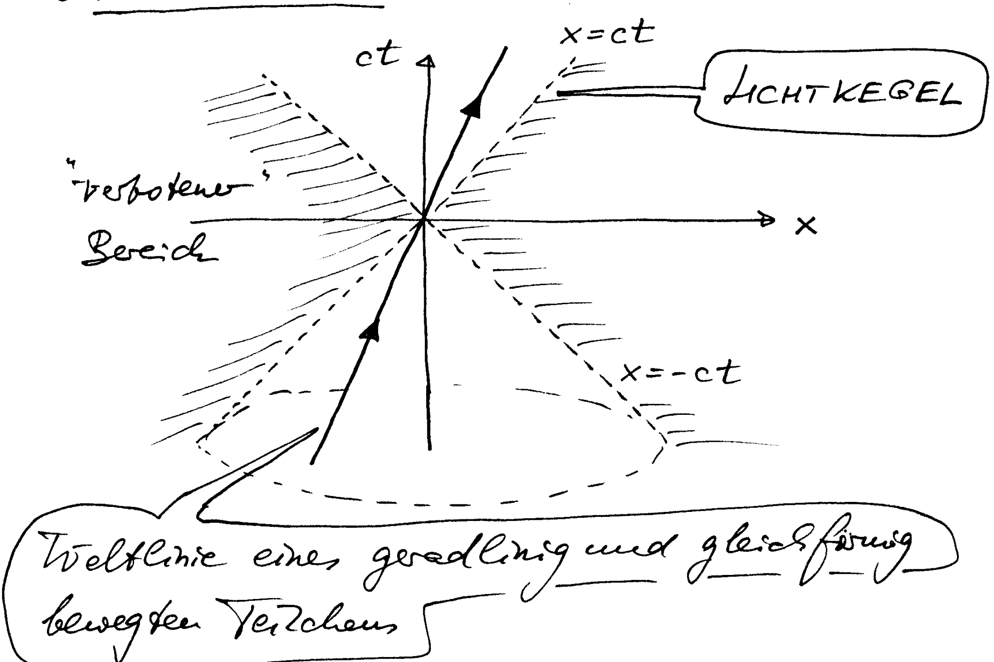
ist eine INVARIANTE

• Definition:

a) ZEITARTIGER Abstand: $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2 > 0$

b) RAUMARTIGER Abstand: $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta\vec{x})^2 < 0$

• LICHTKEGEL:



• Geschwindigkeit eines Teilchens: $v = \left|\frac{dx}{dt}\right| < c$
bzw. $|\Delta x| < c\,|\Delta t|$

• Licht bewegt sich auf dem Lichtkegel mit $v = \left|\frac{dx}{dt}\right| = c$ bzw. $|\Delta x| = c\,|\Delta t|$

• Der "verbotene" Bereich entspräche Ereignissen, die sich mit Geschwindigkeiten $v > c$ (im Vakuum) bewegen oder ausbreiten $\Rightarrow$ physikalisch nicht realisierbar.

11.5 Der MINKOWSKI-Raum

• 4-dimensionaler Raum der Vektoren

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{"Vierer-Vektoren"}}$

• Bezeichnungen:

$(x^\mu)^T = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T = (x^0, \vec{x})^T$

mit $\mu = 0, 1, 2, 3$

• Metrik: definiert durch Quadrat der Länge des Vektors (x^μ):

$$|x|^2 = x \cdot x = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$
$$= (x^0)^2 - \vec{x}^2$$

• Wir unterscheiden Darstellungen der Vierer-Vektoren mit "oben"- und "unten"-stehenden Indizes:

$(x^\mu) = (x^0, \vec{x})$: "kontravariant"

$(x_\mu) = (x^0, -\vec{x})$: "kovariant"

DUAL

• <u>Skalarprodukt</u>:

$$|x|^2 = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - \vec{x}^{\,2}$$

allgemein: Skalarprodukt zweier Vierer-Vektoren:

$$a \cdot b = \sum_\mu a_\mu b^\mu$$

• <u>METRIK-Tensor</u>:

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

es gilt $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ und $x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu$

Skalarprodukt: $a \cdot b = \sum_{\mu\nu} a_\mu b_\nu g^{\mu\nu}$

⇒ Der 4-dimensionale Vektorraum

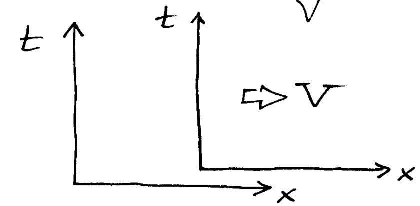
$$\mathbb{M}^4 = \{ (x^\mu) ;\ \mu = 0,1,2,3 \}$$

mit der <u>METRIK</u> $(g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$

heißt <u>MINKOWSKI-RAUM</u>

11.6 LORENTZ-TRANSFORMATION

Zur Erinnerung: die GALILEI-Transformation



$$x = x' + Vt$$
$$t = t'$$
$$(y = y',\ z = z')$$

genügt offenbar <u>nicht</u> dem EINSTEINschen Relativitätsprinzip. Die Lichtgeschwindigkeit würde sich wie $c = c' + V$ transformieren und wäre <u>keine</u> universelle Konstante.

• <u>Gesucht</u>: Transformation, die den Abstand zweier Ereignisse im Minkowski-Raum,

$$\Delta s = \sqrt{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}$$

bei festem c in jedem Bezugssystem invariant läßt. Betrachte o.b.d.A. den Vektor $(ct, x)^T$ für diese Überlegungen. <u>Also</u>: die Transformation $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$ soll "Längen" und "Beträge" invariant lassen:

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$$

⇒ Konstruiere eine Transformation mit diesen Eigenschaften.

- <u>Ansatz</u>:
$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

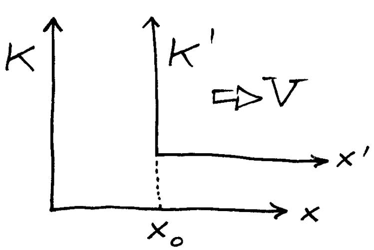
mit
$$\sinh\alpha = \tfrac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) = -i \sin i\alpha$$
$$\cosh\alpha = \tfrac{1}{2}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right) = \cos i\alpha$$
$$\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$$

$\Rightarrow$ es gilt:

$$ct = ct' \cosh\alpha + x' \sinh\alpha \;; \quad x = ct' \sinh\alpha + x' \cosh\alpha$$

und folglich: $(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$, wie gefordert

- <u>bestimme α</u>: beobachte Bewegung des Punktes $x' = 0$ vom K-System aus:



$$ct = ct' \cosh\alpha$$
$$x_0 = ct' \sinh\alpha$$

$\Rightarrow$ folglich:
$$\boxed{\frac{V}{c} = \frac{x_0}{ct} = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} = \tanh\alpha}$$

- <u>Bezeichnungen</u>:
$$\boxed{\frac{V}{c} \equiv \beta \quad , \quad \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} \equiv \gamma}$$

$\Rightarrow$ Offenbar gilt:
$$\boxed{\sinh\alpha = \beta\gamma \quad , \quad \cosh\alpha = \gamma}$$

(wegen $\tanh\alpha = \beta$ und $\sinh^2\alpha - \cosh^2\alpha = \beta^2\gamma^2 - \gamma^2 = -1$)

- LORENTZ-Transformation in kompakter Form (⇒ hier: sog. Spezielle Lorentz-Transformation)

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

<u>bzw.</u> $x^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu\nu}(V)\, x'_{\nu}$ mit der Matrix $\Lambda(V)$ der speziellen Lorentz-Transformation.

- <u>explizit</u>:
$$\boxed{ct = \frac{ct' + \frac{V}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad x = \frac{x' + V t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}$$

$\Rightarrow$ Grenzfall $V/c \ll 1$ $\Rightarrow$ GALILEI-Transformation.

11.7 <u>Lorentz-Kontraktion und Zeit-Dilatation</u>

a) Betrachte einen Längenmaßstab $l_0 = \Delta x$ im K-System, in dem der Maßstab <u>ruht</u>:
$$\Delta x = x_1 - x_2 .$$

Wie ändert sich der Längenmaßstab im bewegten System K' (Relativgeschwindigkeit V)?

$$x_1 - x_2 = \frac{x_1' + V t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} - \frac{x_2' + V t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

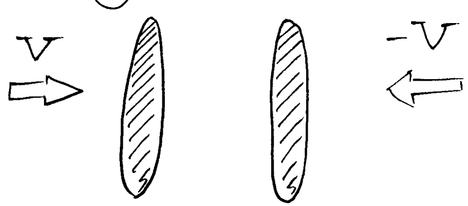
$\Rightarrow$
$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \left(V/c\right)^2}} = \gamma\, \Delta x'$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{\ell' = \ell_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$ LORENTZ-KONTRAKTION

- Die zur Bewegungsrichtung senkrechten Abmessungen bleiben unverändert. Für das Volumen gilt also:

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}_0 \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

- Beispiel: Kollision zweier Ionen bei extrem hohen Energien; im ruhenden Bezugssystem:



„Kugeln" zu „Scheiben" kontrahiert.

b) Zeitdilatation:

- Betrachte zwei Uhren, die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit V bewegen; Messung von Zeitintervallen in den beiden Systemen und Vergleich

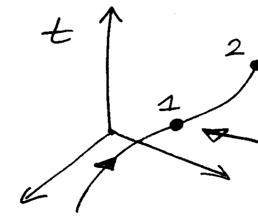
$\Rightarrow$ Uhr 1 sei mit einem Beobachter fest verbunden und mißt Zeitintervall τ („Eigenzeit")

$\Rightarrow$ Uhr 2 mißt Zeit Δt in einem System, das sich relativ zur Uhr 1 mit Geschwindigkeit V bewegt:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$$ ZEITDILATATION

11.8 EIGENZEIT und VIERER-GESCHWINDIGKEIT

- Betrachte eine „Weltlinie" der Bewegung eines Teilchens:



$$(x_2^\mu) = (ct_2, \vec{x}_2)$$
$$(x_1^\mu) = (ct_1, \vec{x}_1)$$

Eine mit dem Teilchen mitlaufende Uhr zeigt das EIGENZEIT-Intervall $\Delta\tau = t_2 - t_1$, wobei

$$\tau = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \text{mit } v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Hier ist t die vom „ruhenden" Beobachter im Labor gemessene Zeit und $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ usw.

- Bilde: $$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} \quad (\mu = 0,1,2,3)$$

d.h.
$$\boxed{\begin{aligned} u^0 &= c\frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma c \\ u^i &= \frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma v^i \quad (i=1,2,3) \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ es gilt:

$$\sum_{\mu=0}^{3} u_\mu u^\mu = |u|^2 = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$$

d.h. der Betrag der Vierergeschwindigkeit ist invariant und gleich der Lichtgeschwindigkeit

11.9 IMPULS und ENERGIE

• Definition: Vierer-Impuls

$$p^\mu = m u^\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

mit
$$\boxed{p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

• p^μ ist ein Vierer-Vektor, da u^μ Vierer-Vektor.

• es gilt: $\sum_{\mu=0}^{3} p_\mu p^\mu = m^2c^2$ (Invariante)

⇒ m heißt Ruhemasse des Teilchens

⇒ mit $m^2c^2 = p_0 p^0 - \vec{p}^{\,2} = p_0^2 - \vec{p}^{\,2}$ folgt:

$$c^2 p_0^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2 \quad \text{bzw.}$$

$$c p_0 = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} = \dots \text{ für } |\vec{p}| \ll mc \dots$$

$$= mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^{\,2}c^2}{m^2c^4} + \dots\right)$$

$$= \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}}_{\text{kinetische Energie}} + \dots$$

... dies ist die RELATIVISTISCHE ENERGIE eines freien Teilchens mit Ruhemasse m:

identifiziere $p_0 = \frac{E}{c}$ mit $E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}$

• Zusammenfassung: VIERER-IMPULS

$$\boxed{(p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)}$$

mit der Energie $E = cp_0 = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}} =$

$$= mc^2\sqrt{1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2c^2}} = mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{\vec{p}^{\,4}}{8m^3c^2} + \dots$$

• Beispiel: Zerfall eines Pions in ein Myon und ein Neutrino: $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$

$m_\pi = 139.6\ \text{MeV}/c^2 \quad (1\ \text{MeV} = 10^6\ \text{eV})$

$m_\mu = 105.7\ \text{MeV}/c^2 = 206.8 * m_e$ ← Masse des Elektrons

$m_\nu \simeq 0$

⇒ Energiebilanz:

$$E_\pi = m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} + |\vec{p}|c$$

⇒ $|\vec{p}| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}c = 29.8\ \text{MeV}/c$

⇒ nahezu die gesamte Massendifferenz von π^+ und μ^+ wird übergeführt in die kinetische Energie des Neutrinos.

• SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE besagt:

MASSE ist eine Form der ENERGIE ("$E = mc^2$") und kann in andere Energieformen umgewandelt werden.