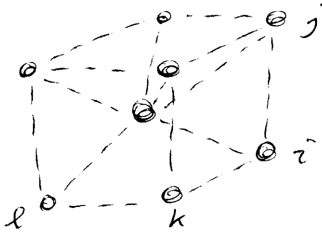
9. MECHANIK STARRER KÖRPER

9.1 Massendichte starrer Körper

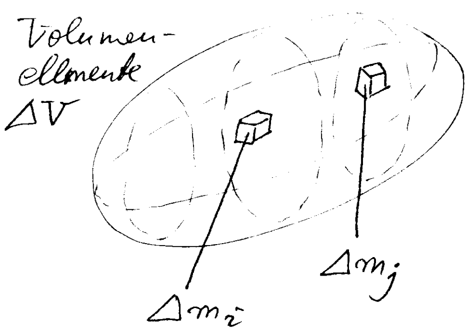
Def.: Starrer Körper: System mit festem Abstand zwischen zwei beliebigen Teilchen oder Massenelementen.

- Beispiel: Kristall

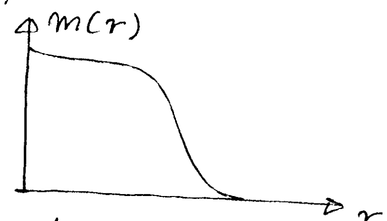


$|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| =$ const

- Beispiel: homogener starrer Körper



Abstand zwischen zwei beliebigen Massenelementen Δm_i und Δm_j ist fixiert.



- Massendichte:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Beim starren Körper ist die Massendichte $\rho(\vec{r})$ fest (zeitunabhängig) vorgegeben.

- Gesamtmasse

$$M = \int d^3r\, \rho(\vec{r})$$

- Ergänzung: Massendichte von Punktsystemen

⇒ δ-Distributionen

⇒ Definition der Delta-Distribution $\delta(x-a)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x-a)\, f(x) = f(a)$$

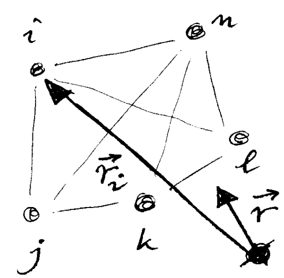
mit "glatter" Funktion f.

⇒ in 3 Dimensionen:

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$$

$$\int d^3r\, \delta^3(\vec{r}-\vec{a}) = f(\vec{a}) \quad ; \quad \int d^3r\, \delta^3(\vec{r}-\vec{a}) = 1$$

- Massendichteverteilung eines Punktsystems:



$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Gesamtmasse:

$$M = \int d^3r\, \rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} m_i \int d^3r\, \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

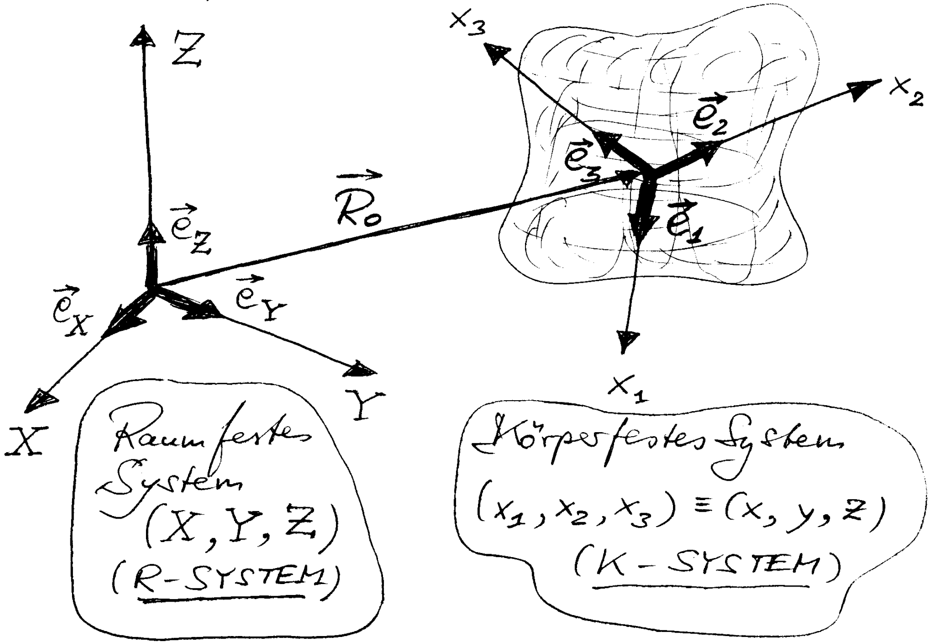
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \quad ✓$$

9.2 Koordinatensysteme und Kinematik

Zur Beschreibung starrer Körper werden zwei Koordinatensysteme definiert:

(a) Raumfestes Koordinatensystem (R-System)

(b) Körperfestes Koordinatensystem (K-System)



- Vektor $\vec R_0$ verbindet Koordinaten-Nullpunkte von R-System und K-System.

⇒ oft wird $\vec R_0$ identifiziert mit dem Schwerpunktsvektor des starren Körpers:

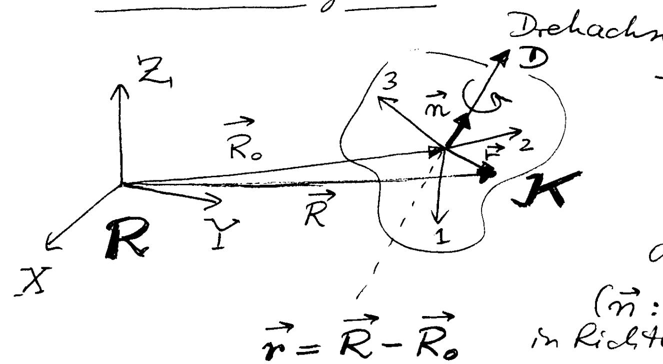
$$\vec R_0 = \frac{1}{M}\int d^3r\, \vec r\, \rho(\vec r) \equiv \vec R_S$$

⇒ $\vec R_0$ kann aber auch ein beliebiger anderer Fixpunkt im starren Körper sein,

- TRANSLATIONSGESCHWINDIGKEIT des K-Systems relativ zum R-System:

$$\vec V(t) = \frac{d\vec R_0(t)}{dt}$$

- Drehbewegung des K-Systems relativ zum R-System



Winkelgeschw.

$$\vec\omega = \frac{d\vec\varphi}{dt}$$

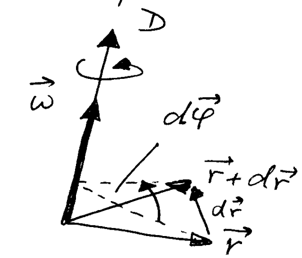
$$d\vec\varphi = d\varphi\, \vec n$$

($\vec n$: Normalenvektor in Richtung d. Drehachse)

- markiere einen Punkt des Körpers im K-System

Geschw. der Drehung:

$$\boxed{\frac{d\vec r}{dt} = \vec\omega \times \vec r}$$



gesamt: $$\boxed{\frac{d\vec R}{dt} = \vec V + \vec\omega \times \vec r}$$

Geschw. im R-System

Translation des starren Körpers

Rotation des K-Systems relativ zum R-System

9.3 LAGRANGE-Funktion des STARREN KÖRPERS

• Betrachte zunächst: System von starr miteinander verbundenen Massenpunkten

(a) Kinetische Energie (vom R-System betrachtet)

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{d\vec{R}_i}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}^2 + \sum_i m_i \vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

• Wähle das **K**-System so, daß $\vec{R}_0$ zum Schwerpunkt des Körpers fällt. Dann gilt

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = 0 \quad , \quad \sum_i m_i = M$$

• Letzter Term: $(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2$

$$\Rightarrow \boxed{T = \underbrace{\frac{1}{2} M \vec{V}^2}_{T_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2\right]}_{T_{rot}}}$$

• Darstellung der Rotationsenergie im **K**-System

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega^2 \vec{r}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 = \sum_{\alpha\beta} \left[\omega_\alpha \omega_\beta \delta_{\alpha\beta} r^2 - \omega_\alpha x_\alpha \omega_\beta x_\beta\right]$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta \left(r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta\right)$$

• Def: Trägheits-Tensor

$$\boxed{I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta\right)_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha \omega_\beta}$$

(b) für kontinuierliche Massenverteilung mit Massendichte $\rho(\vec{r})$:

• Trägheitstensor

$$\boxed{I_{\alpha\beta} = \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \left(r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta\right)}$$

mit $\int d^3r\, \rho(\vec{r}) = M$

(Punktverteilung: $\rho(\vec{r}) = \sum_i m_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i)$)

(c) Zusammenfassung: LAGRANGE-Fkt. des STARREN KÖRPERS

$$\boxed{L = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha \omega_\beta - U}$$

Translations-Energie — Rotations-energie — Potential

$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$ Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Körpers (rel. zum **R**-System)

9.4 Eigenschaften des TRÄGHEITSTENSORS

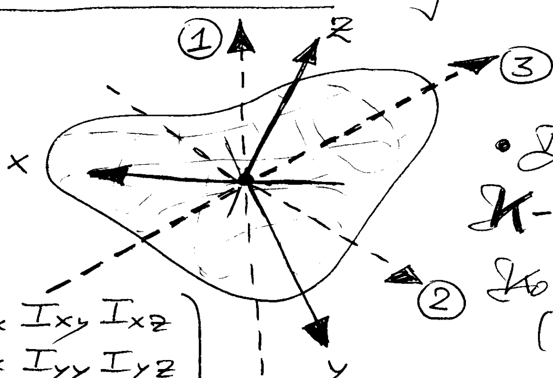
- Matrixdarstellung:

$$(I_{\alpha\beta}) = \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

- Symmetrische Matrix: $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$

- HAUPTACHSEN-Transformation des Trägheitstensors:

⇒ Jede symmetrische Matrix läßt sich durch Wahl eines geeigneten Koordinatensystems auf DIAGONALFORM bringen.



- Darstellung im K-System durch Koordinaten (x, y, z)

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

- Koordinatentransformation gesucht:

$$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \longrightarrow \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$$

so, daß $\hat{I}$ bezüglich der Basis $\{\vec{\varepsilon}_i\}$ in Diagonalform $\hat{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ dargestellt ist.

- Suche die Matrix $\mathcal{D}$, welche die Basis $\{\vec{e}_i\}$ überführt in die Basis $\{\vec{\varepsilon}_j\}$:

$$\mathcal{D}_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j$$

Beispiel:

$$\mathcal{D}\,\vec{e}_x = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{x1} & \mathcal{D}_{x2} & \mathcal{D}_{x3} \\ \mathcal{D}_{y1} & \mathcal{D}_{y2} & \mathcal{D}_{y3} \\ \mathcal{D}_{z1} & \mathcal{D}_{z2} & \mathcal{D}_{z3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{x1} \\ \mathcal{D}_{y1} \\ \mathcal{D}_{z1} \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{e}_x \cdot \vec{\varepsilon}_1)\,\vec{e}_x + (\vec{e}_y \cdot \vec{\varepsilon}_1)\,\vec{e}_y + (\vec{e}_z \cdot \vec{\varepsilon}_1)\,\vec{e}_z = \vec{\varepsilon}_1$$

usw.; die Matrix $\mathcal{D}$ hat folgende Eigenschaften:

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{D} = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^T \quad \left((\mathcal{D}^T)_{ij} = \mathcal{D}_{ji} \right)$

- (ORTHOGONALE TRANSFORMATION)

- für beliebigen Vektor $\vec{r}$: $\quad \vec{r}\,' = \mathcal{D}\vec{r}$

Komponenten $\quad x_i' = \sum_j \mathcal{D}_{ij}\, x_j$

- für beliebige Matrix $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}' = \mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{D}^{-1}$$

oder $\quad \mathcal{A}'_{ij} = \sum_{kl} \mathcal{D}_{ik}\, \mathcal{A}_{kl}\, \mathcal{D}^{-1}_{lj} = \sum_{kl} \mathcal{D}_{ik}\, \mathcal{D}_{jl}\, \mathcal{A}_{kl}$

- Hauptachsentransformation des Trägheitstensors (I_{ij}):

$$I' = \mathcal{D} I \mathcal{D}^{-1} \quad \text{so, daß} \quad I'_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- λ_i heißen Eigenwerte der Matrix I (HAUPT-TRÄGHEITSMOMENTE)

⇒ es folgt: $I'\mathcal{D} - \mathcal{D}I = 0$ oder

$$(I'\mathcal{D})_{ij} - (\mathcal{D}I)_{ij} = \sum_n \left[I'_{in}\mathcal{D}_{nj} - \mathcal{D}_{in} I_{nj}\right] = 0$$

⇒ nun soll I' eine Diagonalmatrix sein,

also $I'_{in} = \lambda_i \delta_{in}$ und folglich:

$$\sum_n I'_{in}\mathcal{D}_{nj} = \lambda_i \mathcal{D}_{ij} = \lambda_i \sum_n \mathcal{D}_{in}\delta_{nj} \; ; \text{also}$$

⇒ $$\boxed{\sum_n \left[I_{nj} - \lambda_i \delta_{nj}\right]\mathcal{D}_{in} = 0}$$

- Bedingung für nicht-triviale Lösung (charakteristische Gleichung):

$$\boxed{\det\left|I_{nj} - \lambda\,\delta_{nj}\right| = 0}$$

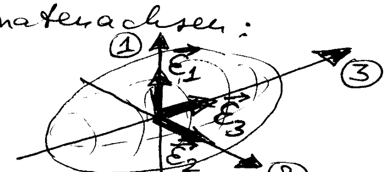
⇒ daraus folgen die EIGENWERTE $\lambda_i \quad (i = 1, 2, 3)$

- nach der Hauptachsentransformation ist die ROTATIONSENERGIE:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} I_i\,\omega_i^2 \qquad \text{mit } I_i \equiv \lambda_i$$

- Dazu gehört die Basis $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\}$ mit entsprechenden Koordinatenachsen:

HAUPTACHSEN, z.B.



- Terminologie:

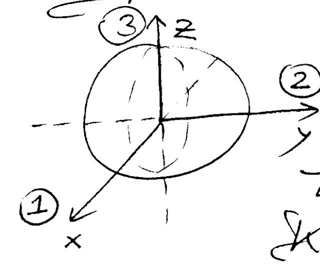
⇒ UNSYMMETRISCHER KREISEL: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$

⇒ SYMMETRISCHER —"— : $I_1 = I_2 \neq I_3$

⇒ KUGELKREISEL: $I_1 = I_2 = I_3$

- Beispiel 1: Trägheitsmoment einer homogenen Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



$I_1 = I_2 = I_3$

Wähle Drehachse durch den Kugelmittelpunkt und I_3 (z-Achse)

$$I_3 = \int d^3r\, \rho(\vec{r})(x^2 + y^2) \quad \text{mit} \quad \rho = \begin{cases} \frac{M}{V} & \ldots |\vec{r}| \leq R \\ 0 & \ldots |\vec{r}| > R \end{cases}$$

(Kugelvolumen $V = \frac{4\pi}{3} R^3$)

⇒ Kugelkoordinaten:

$x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r\cos\theta$

$d^3r \equiv dx\,dy\,dz = dr\, r^2\, d\theta\, \sin\theta\, d\phi$

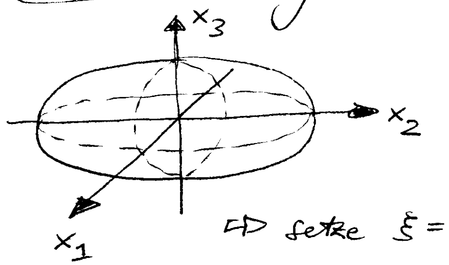
$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\theta$

$$⇒ I_3 = \frac{M}{V}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta \int_0^R dr\, r^4 \sin^2\theta$$

$$= 2\pi \frac{M}{V}\int_0^{\pi} d\theta\, \sin^3\theta \int_0^R dr\, r^4 = \frac{8\pi}{15}\frac{M}{V} R^5$$

$$= \frac{2}{5} M R^2$$

• <u>Beispiel 2</u>: Trägheitsmoment eines Ellipsoids



$x_1 = x \,,\; x_2 = y \,,\; x_3 = z$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

⇒ setze $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{b}$, $\zeta = \frac{z}{c}$

homogene Massenverteilung: $\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 = \frac{M}{V} \ldots \vec{r} \in V \\ 0 \ \ldots \text{sonst} \end{cases}$

(V = Volumen des Ellipsoids)

⇒ betrachte z.B.:

$$I_3 = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\,(x^2+y^2) = \rho_0 \iiint_V dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2)$$

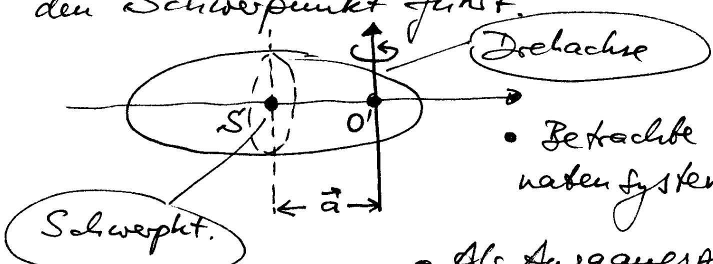
$$= \rho_0\, abc \iiint_V d\xi\, d\eta\, d\zeta\, (a^2\xi^2 + b^2\eta^2) = \frac{1}{5} M (a^2+b^2)$$

und analog: $I_1 = \frac{1}{5} M (b^2+c^2)$, $I_2 = \frac{1}{5} M (a^2+b^2)$

• <u>Rotationsellipsoid</u>: $a = b$ • <u>Kugel</u>: $a = b = c = R$

9.5 Der Satz von STEINER

<u>Problemstellung</u>: bestimme Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Drehachse, die <u>nicht</u> durch den Schwerpunkt führt.



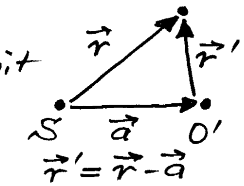
• Betrachte körperfestes Koordinatensystem K' mit Ursprung O'

• Als Ausgangspunkt wieder: System von Massenpunkten.

• Trägheitstensor bezüglich K':

$$I'_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left(r'^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_\alpha x'_\beta \right)_i$$

mit



$$\Rightarrow I'_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \Big[(r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{a} + \vec{a}^2)\,\delta_{\alpha\beta} - (x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) \Big]_i$$

$$= \sum_i m_i (r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta)_i + \sum_i m_i (a^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) - 2\vec{a}\cdot\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i}_{=0} + a_\alpha \underbrace{\sum_i m_i x^i_\beta}_{=0} + a_\beta \underbrace{\sum_i m_i x^i_\alpha}_{=0}$$

wegen $\sum_i m_i x^i_\alpha = 0$ nach Voraussetzung im Schwerpunkt-System K.

⇒ Es folgt

$$\boxed{I'_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + M\,(a^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta)}$$

(Steiner'scher Satz) mit $M = \sum_i m_i$

⇒ Verallgemeinerung auf kontinuierliche Massenverteilung erfolgt analog.

9.6 DREHIMPULS des STARREN KÖRPERS

- Ausgangspunkt: K-System mit Ursprung im Schwerpunkt des Körpers
- DREHIMPULS: $\vec{\ell} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}_i \times \vec{v}_i$ für System von Massenpunkten oder, allgemeiner:

$$\vec{\ell} = \int d^3r \, \rho(\vec{r}) \, (\vec{r} \times \vec{v})$$

- Rotationsbewegung: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\ell} = \int d^3r \, \rho(\vec{r}) \, \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

nun ist $\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = r^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})$. Betrachte nun Komponente ℓ_α des Drehimpulsvektors $\vec{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}$:

$$\ell_\alpha = \int d^3r \, \rho(\vec{r}) \left[r^2 \omega_\alpha - x_\alpha \sum_\beta x_\beta \omega_\beta \right]$$

$$= \sum_\beta \underbrace{\int d^3r \, \rho(\vec{r}) \left[r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta \right]}_{\text{Trägheitstensor } I_{\alpha\beta}} \omega_\beta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ell_\alpha = \sum_\beta I_{\alpha\beta} \, \omega_\beta \quad \text{bzw.} \quad \vec{\ell} = I \vec{\omega}}$$

(vergleiche mit dem Impuls $\vec{p} = m \vec{v}$)

- Rotationsenergie:

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} \, \omega_\alpha \omega_\beta = \frac{1}{2} \sum_\alpha \omega_\alpha \ell_\alpha = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\ell}}$$

- Transformation auf Hauptachsen:

$$\ell_1 = I_1 \omega_1 \,, \quad \ell_2 = I_2 \omega_2 \,, \quad \ell_3 = I_3 \omega_3$$

- Kugelkreisel: $I_1 = I_2 = I_3 = \Theta$ und $\vec{\ell} = \Theta \vec{\omega}$, d.h. $\vec{\ell}$ parallel zu $\vec{\omega}$.

Rotationsenergie $T_{rot} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \frac{1}{2} \ell \omega$

9.7 Bewegungsgleichungen des STARREN KÖRPERS

- Zurück zur Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} \, \omega_\alpha \omega_\beta - U(\vec{R}, \vec{\varphi})$$

mit $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$.

a) Bewegungsgleichung für Translation:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} \quad \Rightarrow \quad M \dot{\vec{V}} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{R}} = \vec{F}$$

($\vec{F}$ ist die äußere Kraft, die auf den Schwerpunkt des Körpers wirkt. Es gilt $\frac{\partial}{\partial \vec{R}} = \vec{\nabla}_R$).

$\Rightarrow$ Falls $\vec{R}$ zyklisch: $M \vec{V} = \vec{P} = \text{const.}$

b) Bewegungsgleichung für Rotation:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega_\alpha} = \frac{d}{dt} \sum_\beta I_{\alpha\beta} \omega_\beta = \frac{d \ell_\alpha}{dt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial \varphi_\alpha} \equiv \mathcal{M}_\alpha \quad (\vec{\mathcal{M}}: \text{DREHMOMENT})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} \quad \text{mit} \quad \vec{\ell} = \underbrace{\hat{I}}_{\text{Trägheitstensor}} \vec{\omega}}$$

9.8 Die EULERschen Kreiselgleichungen

1) Betrachte einen festen Vektor im K-System:

- Geschwindigkeit der Rotationsbewegung, betrachtet im R-System:

$$\vec{v} \equiv (\vec{v})_R = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

2) • Wenn es zusätzlich eine Geschwindigkeit im K-System gibt:

$$\boxed{(\vec{v})_R = (\vec{v})_K + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

3) Verallgemeinerung für beliebigen Vektor $\vec{A}$:

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_K + \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

4) Dies gilt insbesondere für den DREHIMPULS:

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{\ell}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{\ell}}{dt}\right)_K + \vec{\omega} \times \vec{\ell}}$$

- Betrachte nun ein Bezugsystem, in dem der Trägheitstensor auf Hauptachsen transformiert ist. Dort gilt $\ell_\alpha = I_\alpha \omega_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$ und

$$\left(\frac{d\vec{\ell}}{dt}\right)_R = \vec{M} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2 \\ \omega_3 I_1 \omega_1 - \omega_1 I_3 \omega_3 \\ \omega_1 I_2 \omega_2 - \omega_2 I_1 \omega_1 \end{pmatrix}$$

⇒ daraus folgen die EULERschen Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_3 \omega_1 &= M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned}}$$

- für einen Kugelkreisel mit $I_1 = I_2 = I_3 = \Theta$ gilt insbesondere:

$$\boxed{\Theta \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}}$$

9.9 Beispiel: der kräftefreie symmetrische Kreisel

- symmetrischer Kreisel hat die Eigenschaft

$$I_1 = I_2 \;, \quad I_3 \neq I_1$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1)\,\omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_1 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1 \omega_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \text{const} = \omega_3^0 \end{aligned}$$

- einsetzen: $\begin{aligned} \dot{\omega}_1 - \Omega \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 + \Omega \omega_1 &= 0 \end{aligned}$ mit $\Omega = \dfrac{I_1 - I_3}{I_1}\,\omega_3^0$

- differenzieren und 2.61. in 1.61. einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$$

⇒ Lösung: $\omega_1(t) = a \sin(\Omega t + \varphi_0)$

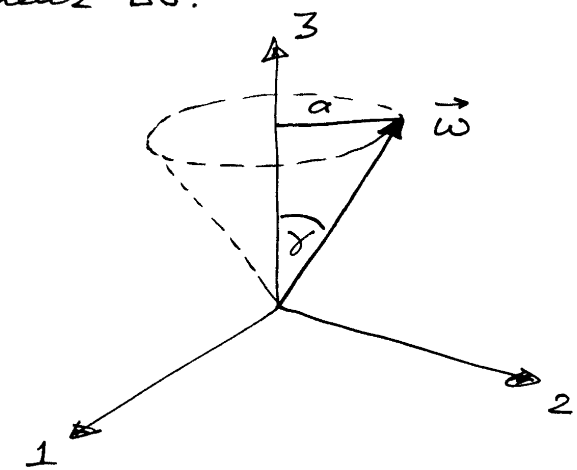
⇒ ebenfalls festgelegt: $\omega_2 = \dfrac{\dot{\omega}_1}{\Omega}$, also:

$$\omega_2(t) = a \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$\Rightarrow$ Betrag von $\vec{\omega}$ bleibt konstant:

$$\vec{\omega}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = (\omega_3^0)^2 + a^2 = \text{const.}$$

- <u>Interpretation</u>: im K-System bewegt sich die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auf einem Kreiskegel mit Radius a und der konstanten Frequenz Ω.



Öffnungswinkel γ ist gegeben durch

$$\gamma = \arctan \frac{a}{\omega_3^0} = \text{const.}$$

- <u>Bemerkung</u>: a und φ_0 in der Lösung $\vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} a \sin(\Omega t + \varphi_0) \\ a \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \omega_3^0 \end{pmatrix}$ werden durch Anfangsbedingungen festgelegt. Für $a=0$ ist $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3^0 \end{pmatrix} = \text{const.}$