Übungen zur Theoretischen Physik 1 (Mechanik)

SS 2008

12. Übungsblatt

(Bertram Klein, Wolfram Weise) Besprechung ab 14. Juli 2008

Aufgabe 32 (Präsenzübung - Besprechung ab 14. Juli)

Hamilton'scher Formalismus (**6P**): Wir betrachten das mathematische Pendel mit Länge l und Masse M im homogenen Schwerefeld der Erde. Es wirken keine weiteren Kräfte. Die Auslenkung soll zunächst *nicht* als klein angenommen werden.

a) (**1P**) Leiten Sie durch eine Legendretransformation die Hamiltonfunktion H des Problems aus der Lagrangefunktion ab.

b) (**1P**) Zeigen Sie explizit, dass H erhalten ist. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

c) (**1P**) Zeigen Sie, dass die Anwendung der Poissonklammern die folgende Bewegungsgleichung für Auslenkung φ und konjugierten Impuls p liefert:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{Ml^2} \\ -Mgl \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Konstruieren Sie $\varphi(t)$ und $p(t)$ für die Anfangsbedingung $p(t=0) = p_0,\ \varphi(t=0) = 0$.

Wir betrachten nun das Phasenraumportrait des mathematischen Pendels, d.h. die Trajektorie des Systems im (φ, p)-Diagramm.

d) (**1P**) Welche Trajektorie wird im Fall kleiner Auslenkungen beschrieben?

e) (**1P**) Welche Trajektorie wird im Fall nicht kleiner Auslenkungen beschrieben, abhängig von der zur Verfügung stehenden Gesamtenergie E?

Hinweis: Verwenden Sie z.B. den Energiesatz, um eine Parametrisierung der Trajektorie zu erhalten. Diskutieren Sie geschlossene und offene Bahnen, labile und stabile Gleichgewichtspunkte der Bewegung.

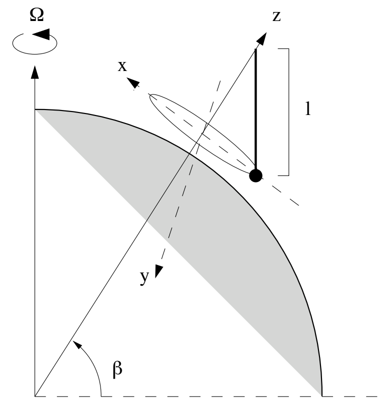
f) (**1P**) Skizzieren Sie den Einfluss von Reibungskräften auf das Phasenraumportrait.

Aufgabe 33 (Präsenzübung - Besprechung ab 14. Juli)

Myonzerfall (**3P**): Ein Myon in Ruhe mit der Masse $m = 106$ MeV/c^2 zerfällt nach $\tau \simeq 2.2 \cdot 10^{-6}$ s. Am Fermi National Accelerator Laboratory (FNAL) bei Chicago werden Myonen mit einer Energie $E = 100$ GeV produziert. Wie lange lebt das Myon mit dieser Energie im Labor? Über welche Distanz bewegt es sich bis zu seinem Zerfall?

(Bitte wenden!)

Aufgabe 34 (Präsenzübung - Besprechung ab 14. Juli)



FOUCAULT'SCHES PENDEL (**10P**): (Nachweis der Erddrehung, Paris 1851) Wir betrachten ein ebenes, mathematisches Pendel der Länge l und Masse m im rotierenden Bezugssystem der Erde, siehe Abbildung. Am Pendelort der geographischen Breite β auf der Erdoberfläche kann das Schwerefeld der Erde als homogen angenommen werden. Der Pendelausschlag ist klein. Die z-Achse zeigt vom Erdmittelpunkt weg, die x-Achse liegt in der durch Nordpol und z-Achse aufgespannten Ebene. Es wirken keine weiteren Kräfte.

a) (**2P**) Vernachlässigt man die Amplitude der vertikalen Pendelbewegung als kleine Größe (warum?), so kann man annehmen, dass die Pendelbewegung vollständig in der xy-Ebene abläuft. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen dann im *ruhenden* Bezugssystem folgendermaßen lauten:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\, x = 0 \;\; , \;\; \ddot{y} + \frac{g}{l}\, y = 0$$

b) (**3P**) Wir benötigen nun die Beziehung zwischen zeitlichen Änderungen von Vektoren in einem ruhenden Bezugssytem (R) und in einem relativ dazu mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ rotierenden System (K). Allgemein gilt dabei für einen Vektor $\vec{a}$

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{a}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}\vec{a}\right)_K + \vec{\Omega} \times \vec{a}.$$

Formulieren Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung im rotierenden (K-)System und zeigen Sie, dass hierbei eine Corioliskraft $\vec{F}_C = -2m(\vec{\Omega} \times \vec{v}_K)$ und eine Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z = -m\,\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ auftreten. Argumentieren Sie, dass man hier $\vec{F}_Z$ vernachlässigen kann.

c) (**2P**) Wie lauten die x- und y-Komponenten der Coriolis-Beschleunigung, ausgedrückt durch Winkelgeschwindigkeit Ω der Erdrotation und geographische Breite? Zeigen Sie, dass die resultierenden gekoppelten Bewegungsgleichungen des genäherten Problems die folgende Form haben:

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\, x = 2\Omega\ \sin\beta\, \dot{y} \;\; , \;\; \ddot{y} + \frac{g}{l}\, y = -2\Omega\ \sin\beta\, \dot{x}$$

d) (**1P**) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen. *Hinweis*: Verwenden Sie den komplexen Ansatz $u = x + iy = Ce^{i\omega t}$. Zeigen Sie die Bedingung

$$\omega^2 + 2\omega\Omega\ \sin\beta - \frac{g}{l} = 0$$

für ω und bestimmen Sie ω auch für "langsame" Rotation ($\Omega^2 \ll \frac{g}{l}$).

e) (**2P**) Bestimmen Sie die Bahnkurve des Pendels in der xy-Ebene. Zeigen Sie, dass eine Rosettenbahn entsteht und berechnen Sie die Periode der Bewegung für den Fall, dass das Pendel in Paris (geogr. Breite $\beta \approx 49°$) aufgehängt ist.