

# ÜBUNGEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK 1 (MECHANIK)

SS 2008

## 9. Übungsblatt

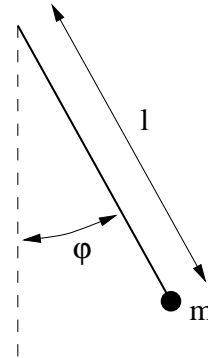
(Bertram Klein, Wolfram Weise)

Besprechung ab 23. Juni 2008

### Aufgabe 23 (Präsenzübung - Besprechung ab 23. Juni)

EBENES PENDEL IM SCHWEREFELD: Ein Massenpunkt  $m$  ist an einem masselosen Stab der Länge  $l$  befestigt und schwingt um seine Ruhelage im Gravitationsfeld der Erde (siehe Abb.).

- Formulieren Sie die Lagrangefunktion des Pendels.
- Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung auf. Wie lautet die Lösung für kleine Pendelausschläge bei beliebiger Anfangsbedingung?



### Aufgabe 24 (Hausübung - 9 Punkte - Abgabe am 23. Juni vor der Vorlesung)

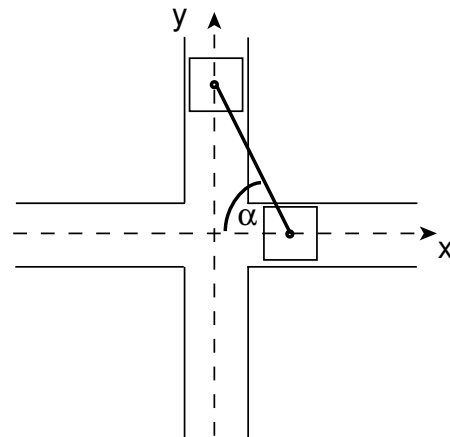
Zwei Klötze gleicher Masse  $m$  sind durch eine starre, masselose Stange der Länge  $l$  verbunden und bewegen sich reibungsfrei entlang des in nebenstehender Abbildung vorgegebenen Weges unter dem Einfluss der Schwerkraft.

- (2P) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für die verallgemeinerte Koordinate  $\alpha(t)$  auf.
- (2P) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung in der Form

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \cos \alpha = 0$$

geschrieben werden kann, wobei  $g$  die Gravitationsbeschleunigung ist.

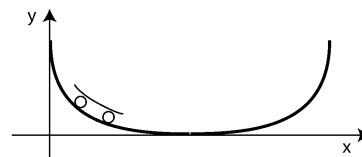
- (3P) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des entlang der  $y$ -Achse fallenden Körpers als Funktion des Winkels  $\alpha$ . Die Anfangsbedingung folge aus einer kleinen Auslenkung aus dem labilen Gleichgewicht bei  $\alpha = 90^\circ$ . Wie groß ist  $\dot{y}$  bei  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 0^\circ$  und  $\alpha = -45^\circ$  für  $l = 1$  m,  $g \simeq 10$  m sec $^{-2}$ ?
- (2P) Bestimmen Sie den Winkel, unter welchem die Fallgeschwindigkeit am größten ist, und den entsprechenden Betrag der Geschwindigkeit.



(Bitte wenden!)

**Aufgabe 25** (Hausübung - 9 Punkte - Abgabe am 23. Juni vor der Vorlesung)

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei im Schwerfeld der Erde auf einer Zykloide (ähnlich einer Halfpipe, siehe rechts). Eine Zykloide kann durch  $x = a(\varphi - \sin \varphi)$ ,  $y = a(1 + \cos \varphi)$  parametrisiert werden, wobei  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .



- a) (2P) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion unter Verwendung von  $\varphi$  als generalisierte Koordinate.
- b) (3P) Zeigen Sie nun, dass daraus die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \cot(\varphi/2) - \frac{g}{2a} \cot(\varphi/2) = 0$$

folgt. Verwendung Sie die Substitution  $u = \cos(\varphi/2)$ , um diese Gleichung drastisch zu vereinfachen.

- c) (2P) Geben Sie nun die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung an sowie die Lösung der Bewegungsgleichung für  $\varphi(t = 0) = \varphi_0 > 0$  und  $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$ . Wie lauten damit die Gleichungen für  $x(t)$  und  $y(t)$ ? Wodurch zeichnet sich das System aus?
- d) (2P) Zeigen Sie, dass sich eine (umgekehrte) Zykloide geometrisch durch das Abrollen eines Rades entlang der horizontalen ( $x$ ) Richtung erzeugen lässt (siehe Figur).

