Übungen zur Quantenmechanik II

WS 2009/10

1. Übungsblatt

(Bertram Klein, Wolfram Weise) Besprechung ab 26. Oktober 2009

Abgabe der Hausübung am
Donnerstag, dem **29.10.**,
vor Beginn der Vorlesung in den Postfächern im Flur vor der Teilbibliothek.

Beginn des Übungsbetriebs ab
Montag, den **26.10.**.

Erste Zentralübung am
Freitag, den **23.10.** um 10:15 im PH HS 2.

Aufgabe 1 (Präsenzübung - Besprechung ab 26.10.)

Ein Teilchen mit Spin 1/2 und dem magnetischen Moment $\vec{\mu} = \mu_0 \, \vec{\sigma}$ sei in einer "Falle" lokalisiert, die sich in einem homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeld $\vec{B}_0$ befindet. Die Richtung von $\vec{B}_0$ definiere die z-Achse eines Koordinatensystems. Im Grundzustand $|-\rangle = |m_s = -1/2\rangle$ sei der Spin in negativer z-Richtung polarisiert. Die Energie dieses Zustandes sei E_-. Der angeregte Zustand $|+\rangle = |m_s = +1/2\rangle$ besitze die Energie E_+.

a) Drücken Sie die Energiedifferenz $E_+ - E_- = \hbar\omega$ durch μ_0 und $|\vec{B}_0|$ aus.

b) Wie lautet die Zeitabhängigkeit der Zustände $|\psi_\pm(t)\rangle$, wenn diese zur Zeit $t = 0$ mit $|\psi_+(t = 0)\rangle = |+\rangle$ bzw. mit $|\psi_-(t = 0)\rangle = |-\rangle$ identifiziert werden?

Nun wirke zusätzlich eine zeitabhängige Störung $\hat{V}(t) = -\vec{\mu}\cdot\Delta\vec{B}(t)$ mit $\Delta\vec{B}(t) = (\Delta B_x, 0, 0)^T$ und

$$\Delta B_x(t) = \begin{cases} b_0 & 0 \leq t \leq \Delta t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle j|\hat{V}(t)|i\rangle$ mit $i, j \in \{+, -\}$.

d) Man formuliere die Wahrscheinlichkeit W_{+-} für den Übergang $|-\rangle \to |+\rangle$ unter dem Einfluß der Störung $\hat{V}(t)$. Diskutieren Sie den Verlauf von $W_{+-}(\Delta t)$ als Funktion des Zeitintervalls Δt.

e) Untersuchen Sie das Verhalten der Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit, $\Gamma_{+-} = W_{+-}/(\Delta t)$, im Grenzfall $\Delta t \to \infty$.

Aufgabe 2 (Hausübung - Abgabe am 29.10. - 10 Punkte)

Ein Wasserstoffatom gehe durch die Emission eines Lichtquants der Energie $\hbar\omega$ von einem diskreten, angeregten Zustand $|b\rangle$ in den Grundzustand $|a\rangle$ über. Die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit lautet nach Fermis Goldener Regel

$$\Gamma_{b\to a} = \frac{4\pi^2 e^2}{\omega V}\delta(E_b - E_a - \hbar\omega)\left|\left\langle a\left|e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\frac{\vec{\varepsilon}\cdot\hat{\vec{p}}}{m}\right|b\right\rangle\right|^2 .$$

(Hier ist $e^2/(\hbar c) \simeq 1/137$). Dabei ist V das Normierungsvolumen für das elektromagnetische Feld, $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$ ist der Impulsoperator, $\vec{\varepsilon}$ ist der Polarisationsvektor und $\vec{k}$ ist der Wellenvektor des emittierten Photons.

a) Wiederholen Sie die Schritte zur Herleitung von $\Gamma_{b\to a}$.

b) Schätzen Sie ab, dass für elektromagnetische Übergänge im diskreten Spektrum von Atomen die Dipolnäherung $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \simeq 1$ gilt. Zeigen Sie damit

$$\Gamma_{b\to a}^{\mathrm{Dipol}} = \frac{4\pi^2 e^2}{V}\omega\delta(E_b - E_a - \hbar\omega)\left|\vec{d}_{ab}\cdot\vec{\varepsilon}\right|^2 ,$$

wobei $\vec{d}_{ab} = \langle a|\vec{r}|b\rangle$.

c) Für die in das Raumwinkelelement $d\Omega$ im $\vec{k}$-Raum emittierte Strahlungsleistung gilt

$$dP = V\,d\Omega \int \frac{dk k^2}{(2\pi)^3}\,\hbar\omega\,\Gamma_{b\to a}.$$

Man zeige, dass dann in der Dipolnäherung mit $\omega = (E_b - E_a)/\hbar$ gilt

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi c^3}\omega^4\left|\vec{d}_{ab}\cdot\vec{\varepsilon}\right|^2 .$$

d) Angenommen, das Wasserstoffatom emittiere linear polarisiertes Licht mit $\vec{\varepsilon} = \vec{e}_z = (0,0,1)^T$. Der angeregte Zustand $|b\rangle$ sei charakterisiert durch den Bahndrehimpuls l_b und die magnetische Quantenzahl m_b (der Spin werde vernachlässigt). Welche Werte (l_b, m_b) werden beim Übergang in den Grundzustand $|a\rangle$ selektiert?