Übungen zur Quantenmechanik II

WS 2009/10

12. Übungsblatt

(Bertram Klein, Wolfram Weise) Besprechung ab 8. Februar 2010

Die **Klausur** findet am
Dienstag, dem **9. Februar 2010** von **10:00–12:00 Uhr** im Physik-Department im **HS 1** statt. Die Klausurdauer ist **90 Minuten**, Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Aufgabe 33 (Hausübung – Besprechung ab 08.02.2010)

Unter Lorentz-Transformationen

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

ändert sich eine Lösung ψ der Dirac-Gleichung gemäß

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\, \psi(x) \quad .$$

Zeigen Sie, dass die 4×4-Matrix S folgende Eigenschaften besitzt:

a) $S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1})$,

b) $S^{-1}(\Lambda)\, \gamma^{\mu}\, S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \gamma^{\nu}$.

Zeigen Sie unter Berücksichtigung der weiteren Eigenschaft $S^{-1} = \gamma_0\, S^{\dagger}\, \gamma^0$, dass

c) $\bar{\psi}(x)\, \psi(x)$ sich wie ein Skalar transformiert,

d) $\bar{\psi}(x)\, \gamma^{\mu}\, \psi(x)$ sich wie ein Vektor transformiert.

Aufgabe 34 (Hausübung – Besprechung ab 08.02.2010)

a) Zeigen Sie, dass der Helizitätsoperator

$$h := \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \text{mit } \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

mit dem Dirac-Hamiltonoperator kommutiert.

b) Spezialisieren Sie das aus der Dirac-Gleichung folgende gekoppelte Gleichungssystem für den Fall eines masselosen Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens. Geben Sie eine geeignete unitäre Transformation U an, durch die das Gleichungssystem entkoppelt werden kann. Zeigen Sie, dass die so erhaltenen Lösungen Eigenfunktionen des Helizitätsoperators sind.

c) Zeigen Sie, dass der Helizitätsoperator für masselose Dirac-Teilchen durch die Dirac-Matrix γ^5 dargestellt wird. **Hinweis**: Bilden Sie $\gamma^5\psi$, wobei ψ die vierkomponentige Lösung der Dirac-Gleichung $i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = 0$ ist, oder betrachten Sie $U\gamma^5 U^{\dagger}$ mit U aus b).

Aufgabe 35 (Hausübung – Abgabe am 04.02.2010 – 10 Punkte)

Betrachten Sie die Streuung eines Dirac-Teilchens an einer Potentialstufe:

$$U(z) = \left\{ \begin{array}{ll} V & \forall z > 0 \\ 0 & \forall z < 0 \end{array} \right\} = V\ \theta(z).$$

Das einlaufende Teilchen bewegt sich mit dem Impuls $\vec{k} = k\ \vec{e}_z$ in z-Richtung, so dass man seinen Spinor schreiben kann als

$$\Psi_{\text{ein}}(z) = e^{ikz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

a) (3 Punkte) Formulieren Sie Ansätze für die reflektierte Welle $\Psi_{\text{ref}}(z)$ und die transmittierte Welle $\Psi_{\text{trans}}(z)$.

b) (3 Punkte) Unter der Annahme, dass die Potentialschwelle den Spin erhält, zeigen Sie aus der Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion am Punkt $z = 0$, dass

$$\Psi_{\text{trans}}(z) \propto e^{iqz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q}{E-V+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } q = \sqrt{(E-V)^2 - m^2} \quad .$$

c) (4 Punkte) Welches Verhalten zeigt $\Psi_{\text{trans}}(z)$ im Falle
(i) $|E-V| < m$, (ii) $|E-V| > m$, und warum? Betrachten Sie dazu auch das Verhältnis von einlaufendem und transmittiertem Wahrscheinlichkeitsstrom. Wie erklärt sich, dass im Fall (ii) scheinbar mehr Teilchen reflektiert werden als einliefen?