Übungen zur Quantenmechanik II

WS 2009/10

9. Übungsblatt

(Bertram Klein, Wolfram Weise) Besprechung ab 18. Januar 2010

Aufgabe 23 (Hausübung – Besprechung ab 18.01.2010)

Gegeben sei ein Zweiteilchenzustand mit bosonischen Feldoperatoren $\hat{\phi}(\vec{r})$:

$$|2\rangle = \int d^3r_1 d^3r_2 f(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, \hat{\phi}^\dagger(\vec{r}_1)\, \hat{\phi}^\dagger(\vec{r}_2)\, |0\rangle.$$

a) Bestätigen Sie die Normierungsbedingung

$$\langle 2|2\rangle = \int d^3r_1 d^3r_2 f^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \left[f(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + f(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \right].$$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle 2|\hat{n}(\vec{r})|2\rangle$ des Dichteoperators $\hat{n}(\vec{r}) = \hat{\phi}^\dagger(\vec{r})\hat{\phi}(\vec{r})$ unter der Annahme $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto f_1(\vec{r}_1)\ f_2(\vec{r}_2)$ mit der Normierungsbedingung aus Teilaufgabe a). Diskutieren Sie das Resultat.

Aufgabe 24 (Hausübung – Besprechung ab 18.01.2010)

Die Bogoliubov-Transformation für bosonische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger_{\vec{p}}$, $a_{\vec{p}}$ lautet:

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}} &= u_p\, \alpha_{\vec{p}} + v_p\, \alpha^\dagger_{-\vec{p}} \\ a^\dagger_{\vec{p}} &= u_p\, \alpha^\dagger_{\vec{p}} + v_p\, \alpha_{-\vec{p}} \end{aligned}$$

a) Bilden Sie die Umkehrtransformation, d.h. drücken Sie α, $\alpha^\dagger$ durch a und $a^\dagger$ aus. Nehmen Sie dabei an, dass auch die Quasiteilchen-Operatoren α, $\alpha^\dagger$ bosonischen Vertauschungrelationen genügen.

b) Bestätigen Sie die Relation $u_p^2 - v_p^2 = 1$.

Aufgabe 25 (Hausübung – Abgabe am 14.01.2007 – 10 Punkte)

Wir betrachten ein System von N Bosonen der Masse m mit einer Kontaktwechselwirkung und mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} \; + \; \lambda \sum_{i<j} \delta^{(3)}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad .$$

a) (4 Punkte) Im Grundzustand seien N_0 Bosonen beim Impuls $\vec{p} = 0$ “kondensiert”, eine kleine Zahl $N - N_0 \ll N_0$ befinde sich in Zuständen mit $\vec{p} \neq 0$. Zeigen Sie, dass sich der Hamiltonoperator in der “klassischen” Näherung $a_{\vec{p}=0} = a^\dagger_{\vec{p}=0} = \sqrt{N_0}$ und bis auf Terme der Ordnung $(N - N_0)^2$ darstellen lässt in der Form

$$\hat{H} = \frac{N^2}{2\mathcal{V}}\lambda + \sum_{\vec{p}\neq 0} \left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{N\lambda}{\mathcal{V}} \right) a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \frac{N\lambda}{2\mathcal{V}} \sum_{\vec{p}\neq 0} \left(a^\dagger_{\vec{p}} a^\dagger_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} \right) .$$

b) (4 Punkte) Verwenden Sie die Bogoliubov-Transformationen und die entsprechenden Schritte aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass der Hamiltonoperator im Grenzfall schwacher Wechselwirkung auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\hat{H} = \frac{N^2}{2\mathcal{V}}\,\lambda - \frac{1}{2} \sum_{\vec{p}\neq 0} \left[\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \lambda\, n - \omega_{\vec{p}} \right] + \sum_{\vec{p}\neq 0} \omega_{\vec{p}}\, \alpha^\dagger_{\vec{p}} \alpha_{\vec{p}}$$

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Anregungsenergie $\omega_{\vec{p}}$ der Quasiteilchen. Wie verhält sich $\omega_{\vec{p}}$ bei kleinen und großen Werten von $|\vec{p}|$? Skizzieren und diskutieren Sie das Resultat.

Fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch!