Zentralübung zur Quantenmechanik II

WS 2009/10

1. Übungsblatt

(Jeremy Holt, Marco Christoforetti, B. Klein, W. Weise) Besprechung am 23. Oktober 2009

Erste Zentralübung am
Freitag, den **23.10.** um 10:15 im PH HS 2.

Themenvorschläge sind ausdrücklich erwünscht! Sprecht uns an oder sendet eine email an `jholt@ph.tum.de`, `mcristof@ph.tum.de` oder `bklein@ph.tum.de`

Aufgabe Z1 (Zentralübung - Besprechung am 23.10.)

Der Spinzustand eines Elektrons wird beschrieben durch zwei Basiszustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$, mit der z-Achse als Quantisierungsachse. Die Spinoperatoren sind gegeben durch $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$, $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$, und $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$. Die Paulimatrizen σ_x, σ_y und σ_z besitzen die Standarddarstellung

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Welche der Operatoren $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ und $\hat{\vec{S}}^2$ vertauschen miteinander? Geben Sie die Vertauschungsrelation $[\hat{S}_x, \hat{S}_y]$ und $[\hat{S}_z, \hat{\vec{S}}^2]$ an. Geben Sie die explizite Darstellung von $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ an, die zur Standarddarstellung der Pauli-Matrizen korrespondiert. Berechnen Sie $\hat{\vec{S}}^2|\uparrow\rangle$, $\hat{\vec{S}}^2|\downarrow\rangle$, $\hat{S}_z|\uparrow\rangle$ und $\hat{S}_z|\downarrow\rangle$.

Ein ruhendes Elektron befinde sich im normierten Eigenzustand des Spinoperators $\hat{S}_y$ zum Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$.

b) Drücken Sie den Zustand, in welchem sich das Elektron befindet, durch die Eigenzustände des Operators $\hat{S}_z$ aus.

Das ruhende Elektron befinde sich nun zusätzlich in einem konstanten magnetischen Feld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ ($B_0 > 0$), welches in z-Richtung zeigt. Der zugehörige Hamiltonoperator ist

$$\hat{H} = \frac{2}{\hbar}\mu_B B_0 \hat{S}_z.$$

Die zeitliche Entwicklung des Zustandes wird beschrieben mit dem Ansatz

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle.$$

c) Stellen Sie die Schrödingergleichung auf und bestimmen Sie die Koeffizienten $a(t)$ und $b(t)$ als Funktionen der Zeit für den angegebenen Anfangszustand des ruhenden Elektrons. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron nach Ablauf der Zeit t im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden?

d) Geben Sie die Zeiten an, zu denen sich das Elektron im Eigenzustand des Operators $\hat{S}_y$ mit Eigenwert $-\frac{\hbar}{2}$ befindet!