

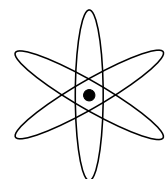
Diplomarbeit von
MONIKA MÜHLBAUER
zum Thema

SKALEN IN KERNMATERIE:
CHIRALE DYNAMIK MIT
PION-NUKLEON-FORMFAKTOREN

Technische Universität München
Physik-Department, T39

Betreut von Prof. Dr. Wolfram Weise
und Dr. habil Norbert Kaiser

März 2006



Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Kernmaterie	5
2.2	Quantenchromodynamik	7
2.3	Symmetrien der QCD	8
2.4	Chirales Kondensat	10
2.5	Chirale Störungstheorie	12
3	Das universale NN-Potential $V_{low k}$	15
3.1	Grundlagen	15
3.2	Konstruktion des $V_{low k}$ -Potentials und Ergebnisse	16
4	Die Zustandsgleichung von isospin-symmetrischer Kernmaterie	21
4.1	Grundlagen	21
4.2	Frühere Rechnungen bei der Temperatur $T = 0$	26
4.3	Die π NN-Vertexfunktion	28
4.4	Beiträge zur Energie pro Teilchen	29
4.4.1	Kinetische Energie	29
4.4.2	Ein-Pion-Austausch	30
4.4.3	Iterierter Ein-Pion-Austausch	31
4.4.4	Irreduzibler Zwei-Pion-Austausch mit bis zu zwei virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregungen	34
4.4.5	Dreikörperterme des Zwei-Pion-Austausches mit einer virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregung	36
4.5	Auswertung	38

4.6	Der irreduzible Zwei-Pion-Austausch und Kontaktterme	45
4.6.1	Der irreduzible Zwei-Pion-Austausch	46
4.6.2	Kontaktterme und Renormierung	50
4.7	Entwicklung nach $r = m_\pi/\Lambda$	53
5	Asymmetrische Kernmaterie	57
5.1	Asymmetrieenergie	57
5.1.1	Einzelbeiträge zur Asymmetrieenergie	58
5.1.2	Auswertung	64
5.2	Neutronenmaterie	64
5.2.1	Einzelbeiträge	65
5.2.2	Auswertung	67
6	Das effektive Einteilchenpotential	71
6.1	Realteile der einzelnen Beiträge	74
6.1.1	Ein-Pion-Austausch	74
6.1.2	Iterierter Ein-Pion-Austausch	75
6.1.3	Irreduzibler Zwei-Pion-Austausch mit bis zu zwei virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregungen	78
6.1.4	Dreikörperterme des Zwei-Pion-Austausches mit einer virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregung	78
6.2	Der Imaginärteil des Einteilchenpotentials	79
6.3	Auswertung des Realteils des effektiven Einteilchenpotentials	80
6.4	Die effektive Nukleonmasse	82
7	Chirales Kondensat	85
8	Zusammenfassung	89
A	Nukleonpropagator im Medium bei der Temperatur $T = 0$	93
B	Hilfsformeln zur Integration über zwei Fermikugeln	97
C	Ein-Pion-Austausch in isospin-symmetrischer Kernmaterie	99
D	Spektralfunktionen beim Zwei-Pion-Austausch	101

Literaturverzeichnis

103

Kapitel 1

Einführung

Die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem kernphysikalischen Vielteilchenproblem und der zugrunde liegenden Theorie der starken Wechselwirkung, der Quantenchromodynamik (QCD), hat in den letzten Jahren ständig an Bedeutung gewonnen. Zahlreiche Versuche, die Kernkräfte direkt aus der Quark-Gluon-Dynamik zu begründen, hat es zwar auch in früheren Zeiten bereits gegeben. Allerdings erwiesen sich derartige Strategien als nicht sinnvoll: Auf der für die Kernphysik relevanten (Fermi-) Impulsskala werden Quarks und Gluonen als Freiheitsgrade gar nicht “aufgelöst”. Als erfolgsversprechend erweist sich vielmehr ein theoretischer Rahmen, der die QCD bei niedrigen Energien und großen Wellenlängen in eine effektive Feldtheorie mit spontan gebrochener (chiraler) Symmetrie abbildet. In dieser Theorie werden Pionen als Goldstonebosonen und Nukleonen (sowie deren Spin-Isospin-3/2-Isobar, die $\Delta(1232)$ -Resonanz) als aktive Niederenergie-Freiheitsgrade eingeführt. Ziel dieser Diplomarbeit ist es, auf der Grundlage einer solchen Theorie für Kernmaterie den Einfluss kurzreichweitiger Skalen durch Einbeziehung von Pion-Nukleon-Vertexfunktionen systematisch zu studieren.

Streuexperimente und die Untersuchung des Deuterons zeigten, dass die Nukleon-Nukleon (NN)-Wechselwirkung weitgehend ladungsunabhängig und kurzreichweitig ist. Yukawa führte sie auf den Austausch von Mesonen zurück. Es gibt eine ganze Reihe von hochpräzisen, phänomenologischen NN-Potentialmodellen, wie z.B. das Argonne *v18* (vgl. [1]) und das CD Bonn (vgl. [2]). Alle erklären den langreichweitigen Teil der Wechselwirkung ($r \gtrsim \frac{1}{m_\pi} \simeq 1.4\text{fm}$) als Austausch eines Pions, während die mittlereichweitigen und die stark repulsiven, kurzreichweitigen Beiträge modellabhängig durch den Austausch mehrerer Pionen oder schwerer Mesonen und durch Kontaktterme parametrisiert werden.

Die bereits anspruchsvolle Beschreibung der freien Wechselwirkung zweier Nukleonen (selbst äußerst komplexe, zusammengesetzte Teilchen) wird beim Übergang auf Kernmaterie, einem homogenen aber komplexen Vielnukleonensystem, zu einem bis heute nicht völlig verstandenen Problem. Die Schwierigkeit liegt u.a. darin, dass der stark repulsive, kurzreichweitige Teil der NN-Wechselwirkung weder Störungstheorie noch mean-field Rechnungen zu erlauben scheint. Ferner wird der Phasenraum jedes NN-Streuprozesses durch die

anderen Nukleonen über das Pauli-Prinzip eingeschränkt. Mehrkörperkräfte - insbesondere die Wechselwirkung von drei Nukleonen - können zudem eine wesentliche Rolle spielen. Die Nukleonen spüren in Kernmaterie also nicht mehr die freie, sondern eine effektive NN-Kraft. Einige Ansätze dafür verwenden die Brückner'sche G-Matrix (siehe [3] und dortige Quellen), welche anschaulich das Pendant zur freien Streumatrix im Medium ist. Eine andere Möglichkeit ist die direkte Verwendung phänomenologischer Kräfte mit einigen Parametern, die an experimentelle Daten angepasst werden. Beispiele hierfür sind die Skyrme-, die Gogny- und die Migdal-Wechselwirkung (vgl. [3]), die dann in Kernstruktur-Rechnungen (z.B. mittels der Hartree-Fock Methode) eingesetzt werden können.

Ein ganz anderer, recht neuer Ansatz (vgl. [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]) rollt das Problem des Übergangs von der freien NN-Wechselwirkung auf das Vielkernsystem nochmals von vorne auf. Alle realistischen NN-Potentiale reproduzieren die empirischen Streuphasen und die Deuteron-Daten. Sie stimmen zudem im Bereich mittlerer und großer Reichweiten miteinander überein, sind jedoch bei kurzen Reichweiten nicht eindeutig. Aus einer beliebigen, freien NN-Wechselwirkung wird nun mit Hilfe einer Renormierungsgruppengleichung ein universales, weiches NN-Potential $V_{low k}$ konstruiert.¹ Da alle kurzreichweitigen Beiträge beseitigt sind, ist somit doch eine perturbative Behandlung möglich. Auf diese vielversprechende Methode wird in Kap.3 der vorliegenden Arbeit genauer eingegangen.

Bereits etwas länger gibt es in der Vielfalt der Beschreibungen von Kernmaterie auch die chirale Störungstheorie, die nicht auf ein halbempirisches und hochpräzises NN-Potential zurückgreift. Ihre Grundlage ist die Lücke von $\Lambda_\chi \simeq 4\pi f_\pi \simeq 1.16 \text{ GeV}$ im hadronischen Massenspektrum, die eine Trennung kleiner und großer Energieskalen bzw. lang- und kurzreichweitiger Dynamik ermöglicht. Beschränkt auf den niederenergetischen Bereich stellen die Nukleonen zusammen mit den Goldstonebosonen aus der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie die aktiven Freiheitsgrade dar. Die Goldstonebosonen besitzen durch die explizite chirale Symmetriebrechung (endliche Quarkmassen) eine geringe Masse. Da die auftretenden Impulse in der betrachteten effektiven Feldtheorie (EFT) klein gegen die charakteristische Skala Λ_χ sind, lässt sich eine Störungsentwicklung bezüglich dieser kleinen Impulse durchführen und ein konsistentes Zählschema entwickeln. Die zur EFT gehörige Lagrangedichte muss die gleichen Symmetrien und Symmetriebrechungen wie die Lagrangedichte der zugrundeliegenden QCD besitzen.

In diesem Rahmen untersucht die vorliegende Diplomarbeit die Sättigung von isospin-symmetrischer Kernmaterie (bei der Temperatur $T = 0$) durch expliziten Pionenaustausch zwischen den Nukleonen. Es handelt sich im Wesentlichen um eine Fortsetzung der Arbeiten von Stefan Fritsch, Norbert Kaiser und Wolfram Weise (siehe [13, 14, 15, 16, 17, 18]).²

¹Weich meint in diesem Zusammenhang, dass das Potential auf den niederenergetischen Bereich beschränkt ist.

²Bereits in [19] und [20] finden sich ähnliche Berechnungen, allerdings werden in der dortigen Regularisierung die divergenten Beiträge in einer attraktiven, nullreichweitigen Kontaktwechselwirkung zusammengefasst. Der Sättigungspunkt hängt sehr sensitiv von diesem Kontaktterm ab, dessen dynamischer Hintergrund unklar bleibt. Für das mittlere Feld ergibt sich zudem keine ausreichende Tiefe.

Dabei wird die bisherige cut-off Regularisierung von einer π NN-Vertexfunktion vom Typ eines Monopols abgelöst. Das Zählschema umfasst systematisch alle Diagramme bis in Drei-Loop-Ordnung und beinhaltet eine explizite Behandlung der $\Delta(1232)$ -Anregung des Nukleons. Ein Hauptaugenmerk liegt auf der Abhängigkeit der einzelnen Beiträge zur Energie pro Teilchen von der Monopolmasse und der verwendeten Renormierungsskala. In diesem Rahmen werden anschließend die Asymmetrieenergie, die Zustandsgleichung von Neutronenmaterie sowie der Realteil des Einteilchenpotentials (das nukleare mittlere Feld) in Kernmaterie und die Dichteabhängigkeit des chiralen Kondensats untersucht.

Der **Rahmen dieser Arbeit** ist wie folgt gesteckt:

- Kapitel 2 skizziert zunächst einige allgemeine Kerneigenschaften und befasst sich anschließend mit den Grundlagen der QCD (soweit sie hier von Belang sind) und der darauf aufbauenden chiralen Störungstheorie.
- In Kapitel 3 werden das NN-Potential V_{lowk} und seine Ergebnisse bei der Berechnung von Kernmaterie vorgestellt.
- Isospin-symmetrische Kernmaterie wird in Kapitel 4 ausführlich untersucht, wobei der Schwerpunkt auf die vollständige Einarbeitung der π NN-Vertexfunktion gelegt ist. Die analytischen Ergebnisse der einzelnen Beiträge zur Energie pro Teilchen werden präsentiert und der Sättigungsmechanismus betrachtet. Im Anschluss daran wird genauer auf die Rolle von Kontakttermen eingegangen. Sie bieten die Möglichkeit, Abhängigkeiten von der Monopolmasse auszubalancieren.
- Auf der Grundlage der Ergebnisse von Kapitel 4 befasst sich Kapitel 5 mit asymmetrischer Kernmaterie. Dabei werden die Asymmetrieenergie und der Extremfall von reiner Neutronenmaterie untersucht.
- In Kapitel 6 werden ebenfalls im gleichen Rahmen die Ergebnisse für den Realteil des Einteilchenpotentials vorgestellt und diskutiert.
- Die Abhängigkeit des Ordnungsparameters der chiralen Symmetriebrechung, also des chiralen Kondensats, von der Nukleonendichte wird in Kapitel 7 skizziert.
- Kapitel 8 gibt schließlich eine kurze Zusammenfassung und einen Ausblick auf mögliche weitere Entwicklungen.
- Im Anhang wird die Herleitung des Nukleonpropagators im Medium wiederholt und das Ein-Pion-Austausch-Diagramm im Kernmedium ausführlich vorgerechnet. Ferner werden dort einige Formeln angegeben, die für das Lösen von Mehrfach-Integralen über Fermikugeln hilfreich sind bzw. für einige Berechnungen benötigt werden.

Noch ein kurzer Hinweis zu den **Konventionen**:

Wie in der theoretischen Physik üblich, werden auch in dieser Arbeit die natürlichen Einheiten $\hbar = c = 1$ verwendet. Falls nicht näher spezifiziert (z.B. p) sind unter Vektoren stets Lorentz-Vierervektoren zu verstehen; Dreiervektoren werden mit Pfeilen hervorgehoben (\vec{p}). Die Einstein-Konvention zur Summation über doppelt vorkommende Indizes wird angewandt.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden zunächst einige allgemeine Eigenschaften von Kernmaterie vorgestellt, deren Beschreibung das Ziel dieser Arbeit ist. Die dabei verwendete chirale Störungstheorie leitet sich von der fundamentalen Theorie der starken Wechselwirkung - der Quantenchromodynamik (QCD) - ab, weshalb wir im Anschluss eine kurze Zusammenfassung davon geben (siehe u.a. [21, 22, 23, 24]).

2.1 Kernmaterie

Unter Kernmaterie versteht man ein *unendlich ausgedehntes* und homogenes System von wechselwirkenden Nukleonen im *Grundzustand*.¹ Die Verteilungsfunktion im Impulsraum hat die Form einer Stufenfunktion $\Theta(k_f - |\vec{p}|)$. Es gilt die Sättigungseigenschaft dieses Systems zu verstehen, d.h. die Energie pro Nukleon zu untersuchen und deren Minimum bei endlicher Dichte ρ_0 zu finden.

Für *endliche* Kerne gibt es eine Reihe von Modellen zur Beschreibung (siehe [3, 25, 26] u.v.a.), wobei zu den einfachsten und anschaulichsten das Fermigasmodell und das Tröpfchenmodell zählen. Bei letztgenanntem wird der Kern (mit A Nukleonen, wovon Z Protonen und N Neutronen sind; $Z + N = A$) als Tropfen einer inkompressiblen Flüssigkeit betrachtet, dessen Energie sich über die Bethe-Weizsäcker Massenformel (1935) berechnen lässt:

$$M(A, Z) = NM_n + ZM_p - a_V A + a_S A^{2/3} + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_A \frac{(N - Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{1/2}}. \quad (2.1)$$

Die ersten beiden Terme der rechten Seite geben die Ruheenergien der Konstituenten an. Die restlichen fünf Terme sind für die Kernbindung verantwortlich. Sie lassen sich mit der Beziehung zwischen Kernradius und Nukleonenzahl, $R \propto A^{1/3}$, einfach deuten. Der dominante Beitrag in a_V heißt Volumenterm und zeigt, dass die Reichweite der Kernkraft kurz

¹Wir setzen die idealisierte Vorstellung voraus, dass die Coulombabstoßung der Protonen "ausgeschaltet" werden kann.

ist. Würde jedes Nukleon mit jedem anderem Nukleon wechselwirken, wäre eine Abhängigkeit in $A(A-1)/2$ statt in A zu erwarten. Diese sogenannte Sättigung der Kernkraft führt zu einer im Inneren für alle Kerne gleichen Dichte von etwa 0.16 Nukleonen/ fm^3 . Der nächste Term in a_S berücksichtigt den reduzierten Beitrag zur Bindungsenergie von Nukleonen an der Kernoberfläche. Der Summand in a_C bringt die Coulombabstoßung der Protonen zum Ausdruck und der Term in a_A wird als Asymmetrienergie bezeichnet. Für kleine A sind Kerne mit gleicher Neutronen- und Protonenzahl bevorzugt, während für schwere Kerne ein Neutronenüberschuss günstiger ist, um der Coulombabstoßung der Protonen entgegenzuwirken. Der letzte Term in Gl. (2.1) beschreibt schließlich die Paarungsenergie, wonach gerade Anzahlen von Protonen und Neutronen günstiger sind. Fitwerte für die fünf Parameter a_V, \dots, δ an experimentelle Daten sind in [27] zu finden.

Die von uns betrachtete unendlich ausgedehnte Kernmaterie ist weitgehend im Inneren eines endlichen, aber sehr großen und schweren Kerns realisiert. Komplizierte Rand- und Oberflächeneffekte (Term in a_S in Gl. (2.1)) spielen keine Rolle. Zudem lassen wir die Coulombkräfte zwischen Protonen und die Paarungsenergie außer Acht. Unsere Überlegungen betreffen also im Wesentlichen den Volumenterm und in Kap. 5 auch den Asymmetriebeitrag. Für isospin-symmetrische Kernmaterie ist die Umgebung des Sättigungspunktes experimentell zugänglich und gibt Vergleichswerte für unsere Rechnungen vor.

Der Fermiimpuls bzw. die Baryondichte am Sättigungspunkt lassen sich aus Daten zu quasi-elastischer Elektron-Kern Streuung herausarbeiten (vgl. [14] und Referenzen dort):

$$k_{f,0} = (262 \pm 4) \text{ MeV} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_0 = (0.158 \pm 0.008) \text{ fm}^{-3}. \quad (2.2)$$

Das Minimum der Energie pro Teilchen $\bar{E}(k_f)$ bei $k_{f,0}$ hat einen Wert von (zitiert z.B. in [28]):

$$\bar{E}_0 = (-16 \pm 1) \text{ MeV}. \quad (2.3)$$

Dieser Wert entspricht sehr gut dem Volumenterm der Bethe-Weizsäcker Massenformel überein: $a_V \approx 15.4 \text{ MeV}$ (in [27]).

Im Sättigungspunkt wird die Krümmung der Kurve für die Energie pro Teilchen $\bar{E}(k_f)$ durch die sogenannte Kompressibilität beschrieben (siehe [29]):

$$\kappa = k_{f,0}^2 \frac{\partial^2 \bar{E}(k_f)}{\partial k_f^2} \Big|_{k_f \rightarrow k_{f,0}} = (220 \pm 50) \text{ MeV}. \quad (2.4)$$

Dieser Wert lässt sich im Prinzip aus experimentellen Werten für die Energien isoskalarer Monopolvibrationen (Riesenmonopolresonanzen GMR) von schweren Kernen extrahieren. Die Diskussionen über den genauen Wert sind jedoch kontrovers (siehe [30]) und beispielsweise relativistische mean-field Rechnungen ergeben einen höheren Wert um die 260 MeV (vgl. ebenfalls [30]).

Bevor wir unsere Berechnungen und deren Vergleich mit den gegebenen Werten anstellen, wollen wir einen Schritt zurückgehen und, wie angekündigt, zunächst eine kurze Einführung in die zugrundeliegende, fundamentale Theorie geben.

2.2 Quantenchromodynamik

Die QCD ist die nicht-abelsche Eichtheorie der starken Wechselwirkung. Die punktförmigen aber massiven Quarks, welche Spin $\frac{1}{2}$ tragen, treten in sechs flavors auf: up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) und top (t). Die der QCD zugrundeliegende Eichgruppe ist die Farb-SU(3)_C.

Bezeichnet man die drei Farbfreiheitsgrade mit rot (R), blau (B) und grün (G), so kann man die Quarkfelder allgemein schreiben als:

$$\Psi = \Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_R(x) \\ \Psi_B(x) \\ \Psi_G(x) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Setzt man voraus, dass alle sechs flavors eine Rolle spielen, so besteht jedes $\Psi_i(x)$, $i \in \{R, B, G\}$, aus sechs vierkomponentigen Diracspinoren, hat also 24 Komponenten.

Unter einer lokalen Farb-Eichtransformation

$$U(x) = \exp\left(-i\frac{\lambda_a\Theta_a(x)}{2}\right) \quad (2.6)$$

an einem beliebigen Raum-Zeit-Punkt transformieren sich die Quarkfelder gemäß

$$\Psi \rightarrow \tilde{\Psi} = U(x)\Psi. \quad (2.7)$$

Die $\lambda_i = t_a/2$, $a \in \{1, \dots, 8\}$, gehorchen als Generatoren der SU(3)_C der Lie-Algebra mit $[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}$ (die f_{abc} sind die total antisymmetrischen Strukturkonstanten) und werden in der Standarddarstellung durch die Gell-Mann Matrizen repräsentiert. Die $\Theta_a(x)$ sind acht reelle und lokale Parameter.

Die Eichtransformation, Gl. (2.6), muss die Lagrangedichte invariant lassen, was die Einführung von acht Eichfeldern A_μ^a erfordert. Sie repräsentieren die masselosen Spin 1-Eichbosonen, die Gluonen.

Zusammen mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a(x) \quad (2.8)$$

und dem gluonischen Feldstärketensor

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf_{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x) \quad (2.9)$$

lautet die QCD-Lagrangedichte, der Schlüssel zur starken Wechselwirkung, schließlich:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi}(iD_\mu\gamma^\mu - m_q)\Psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Abgesehen von einer Renormierungsskala beinhaltet die Quarkmassenmatrix m_q mit den Massen der Stromquarks (siehe [31]) die einzigen, laufenden Parameter der QCD.

Aus dem letzten Term in Gl. (2.9) ist ersichtlich, dass nicht nur die Quarks Farbladung tragen und über den Austausch von Gluonen wechselwirken, sondern dass auch die Gluonen selbst farbgeladen sind und untereinander wechselwirken, was die Theorie der starken Wechselwirkung nichtlinear macht. Die Tatsache, dass die Generatoren nicht kommutieren (dass also die Gluonen auch miteinander wechselwirken), wird für die asymptotische Freiheit (die QCD kann im Hochenergielimes perturbativ behandelt werden) und für das Confinement (beobachtbar sind nur hadronische Farbsingulets und niemals freie Quarks) verantwortlich gemacht.

Da die laufende Kopplung der starken Wechselwirkung, $\alpha_s(Q) = \frac{g^2(Q)}{4\pi}$, für niedrige Energien und Impulse, $Q^2 < 1 \text{ GeV}$, wie sie für uns von Interesse sind, von der Größenordnung eins ist, ist eine perturbative Behandlung der QCD in diesem Bereich nicht mehr möglich und man muss zu Gitter-QCD oder (wie in unserem Fall) zu effektiven Feldtheorien übergehen. Damit diese physikalisch Sinn machen, müssen sie die Symmetrien der zugrunde liegenden QCD beachten, welche im Folgenden kurz vorgestellt werden.

2.3 Symmetrien der QCD

Die Wechselwirkungen in der QCD sind durch die *lokale* $SU(3)_C$ -Farbsymmetrie festgelegt. Weitere *globale*, unitäre Transformationen führen gemäß dem Noethertheorem zu Erhaltungsgrößen.

Von jetzt an beschränken wir uns auf zwei flavors, nämlich u und d . Diese Quarks sind sehr leicht im Vergleich zu denen der vier anderen flavors. Bei niedrigen Energien können, c , b und t in erster Näherung als unendlich schwer betrachtet werden, d.h. ihre aktiven Freiheitsgrade sind eingefroren. Auch s -Quarks sind in diesem Sinne bereits "schwer" und werden nicht als aktive Freiheitsgrade behandelt.

Das Quarkfeld Ψ hat nun 24 Komponenten (3 Farben \cdot 2 flavors \cdot 4-Spinorkomponenten). Da im Folgenden die flavor-Freiheitsgrade entscheidend sind, wählen wir jetzt die Schreibweise

$$\Psi = \Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_u(x) \\ \Psi_d(x) \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Die einfachste Transformation, die die QCD Lagrangedichte (Gl. (2.10)) invariant lässt, ist die Multiplikation der Quarkfelder mit einem globalen Phasenfaktor, also eine $U(1)$ -Symmetrie:

$$\Psi \rightarrow \exp(i\Theta) \Psi. \quad (2.12)$$

Der zugehörige erhaltene Strom und die Ladung, die die erhaltene Baryonenanzahl (auf 1/3 pro Quark normiert) darstellt, sind:

$$J^\mu(x) = \frac{1}{3} \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) \quad ; \quad B = \frac{1}{3} \int d^3x \Psi^\dagger(x) \Psi(x). \quad (2.13)$$

Für den Fall identischer Quarkmassen $m_u = m_d$ gäbe es außerdem eine $SU(2)$ flavor-Symmetrie, die sogenannte Isospinsymmetrie. Die Lagrangedichte der QCD wäre invariant unter der Transformation

$$\Psi \rightarrow \exp\left(i\Theta^a \frac{\tau_a}{2}\right) \Psi, \quad (2.14)$$

wobei die τ_a , $a \in \{1, 2, 3\}$, die Generatoren der $SU(2)$ sind - in der Standarddarstellung die Paulimatrizen. Die dazugehörigen erhaltenen Vektorströme und Ladungen lauten:

$$V_a^\mu(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \frac{\tau_a}{2} \Psi(x) \quad ; \quad Q_a = \int d^3x \Psi^\dagger(x) \frac{\tau_a}{2} \Psi(x). \quad (2.15)$$

Da die Quarkmassen jedoch voneinander abweichen, ist diese Isospin-Symmetrie leicht explizit gebrochen.

Die für uns entscheidende Symmetrie betrifft die Chiralität der Quarks. Zunächst nehmen wir dazu $m_u = m_d = 0$ an (chiraler Limes). Masselose Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen sind von definierter Chiralität und die Felder lassen sich auf links- bzw. rechtshändige umschreiben:

$$\Psi_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \Psi. \quad (2.16)$$

Die Lagrangedichte (Gl. (2.10)) ist dann symmetrisch unter den $SU(2)_R \times SU(2)_L$ -Transformationen

$$\Psi_R \rightarrow \exp\left(i\Theta_R^a \frac{\tau_a}{2}\right) \Psi_R \quad ; \quad \Psi_L \rightarrow \exp\left(i\Theta_L^a \frac{\tau_a}{2}\right) \Psi_L. \quad (2.17)$$

Die erhaltenen links- und rechtshändigen Ströme addiert bzw. subtrahiert man gewöhnlich und ermittelt so die erhaltenen Vektor- bzw. Axialvektorströme und deren zugehörige Ladungen:

$$\begin{aligned} V_a^\mu(x) &= \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \frac{\tau_a}{2} \Psi(x) \quad ; \quad Q_a^V = \int d^3x \Psi^\dagger(x) \frac{\tau_a}{2} \Psi(x); \\ A_a^\mu(x) &= \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau_a}{2} \Psi(x) \quad ; \quad Q_a^A = \int d^3x \Psi^\dagger(x) \gamma_5 \frac{\tau_a}{2} \Psi(x). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Würde ein "triviales" Wigner-Weyl Vakuum vorliegen (d.h. $Q_a^V|0\rangle = Q_a^A|0\rangle = 0$), so dürfte man in der Natur nur Paritätsdubletts beobachten: Jeder Zustand negativer Parität müsste einen Partner positiver Parität und gleicher Masse besitzen. Dies ist nicht der Fall (z.B. $m_\rho \approx 0.77 \text{ GeV} \Leftrightarrow m_{a_1} \approx 1.23 \text{ GeV}$) - der Grundzustand der QCD teilt die chirale Symmetrie nicht und sie ist *spontan* gebrochen.

Da im betrachteten chiralen Limes $m_u = m_d (= 0)$ gilt, ist jedoch die bereits oben besprochene $SU(2)$ flavor-Symmetrie, die hier mit der Vektorsymmetrie übereinstimmt, erfüllt, d.h. $Q_a^V|0\rangle = 0$. Daher muss die axiale $SU(2)_A$ -Symmetrie spontan gebrochen sein, $Q_a^A|0\rangle \neq 0$, und insgesamt ist die chirale Symmetrie auf die Isospinsymmetrie reduziert, $SU_R(2) \times SU(2)_L \rightarrow SU(2)_V$ (Nambu-Goldstone Realisierung des Grundzustands). Gemäß Goldstone's Theorem gibt es dann drei masselose, pseudoskalare Mesonen, die mit den Pionen π^0, π^\pm identifiziert werden. In der Natur sind sie nicht exakt masselos ($m_{\pi^0} \approx 134.98$ MeV, $m_{\pi^\pm} \approx 139.57$ MeV, siehe [31]), da die chirale Symmetrie durch die kleinen, aber endlichen Massen von u und d auch *explizit* gebrochen ist. Die Übergangsamplitude der Goldstonebosonen über den Axialvektorstrom ins Vakuum ², $\langle 0|A_a^\mu(x)|\pi_b(p)\rangle = ip^\mu \delta_{ab} f_0 e^{-ipx}$, legt mit der Pionzerfallskonstante f_0 (hier im chiralen Limes) eine wichtige, dimensionsbehaftete Größe fest: $f_\pi = f_0(1 + \mathcal{O}(m_q)) \approx (92.4 \pm 0.3)$ MeV (siehe [31]). Im hadronischen Massenspektrum nehmen die Pseudo-Goldstonebosonen eine Sonderrolle ein, denn alle Baryonen- und die meisten Mesonenzustände liegen etwa $\Lambda_\chi \simeq 4\pi f_\pi \simeq 1$ GeV über dem Grundzustand, während die Pionen nur knapp über diesem in der Lücke liegen. Diese Skalentrennung ist der Schlüssel um niederenergetische QCD mit systematischer, chiraler Störungstheorie anzugehen und aktive Freiheitsgrade auszuwählen.

2.4 Chirales Kondensat

Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie geht einher mit einer nicht-perturbativen Umordnung des Grundzustands (Vakuum). Dieser ist von Quark-Antiquark-Paaren bevölkert, deren skalare Dichte einen von Null verschiedenen Erwartungswert, das chirale Kondensat, hat. Es lässt sich im Grundzustand, beschränkt auf die flavors u und d , schreiben als:

$$\langle 0|\bar{\Psi}\Psi|0\rangle = \langle \bar{\Psi}\Psi\rangle_0 = \langle \bar{\Psi}_u\Psi_u\rangle_0 + \langle \bar{\Psi}_d\Psi_d\rangle_0 \equiv \langle \bar{u}u\rangle_0 + \langle \bar{d}d\rangle_0. \quad (2.19)$$

Auch möglich ist diese Darstellung mit $\bar{\Psi}\Psi = \bar{\Psi}_R\Psi_L + \bar{\Psi}_L\Psi_R$, die das chirale Kondensat als Maß für die Mischung links- und rechtshändiger Quarks charakterisiert. Damit wird anschaulicher aufgezeigt, warum der Grundzustand die chirale Symmetrie nicht teilt.

Die exakte, formale Definition des chiralen Kondensats bezieht den Quarkpropagator $S_F(x, y) = -i\langle 0|\mathcal{T}\Psi(x)\bar{\Psi}(y)|0\rangle$ ein und lautet $\langle \bar{\Psi}\Psi\rangle_0 = -i \text{Tr} \lim_{y \rightarrow x} S_F(x, y)$.

Der enge Zusammenhang zwischen spontaner Brechung der chiralen Symmetrie und dem nicht-verschwindenden chiralen Kondensat lässt sich durch die Einführung der pseudoskalaren Dichte $P_a(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma_5\tau_a\Psi(x)$ herstellen. Leitet man die (gleichzeitige) Kommutatorbeziehung $[Q_a^A, P_b] = -\delta_{ab}\bar{\Psi}\Psi$ (mit Q_a^A aus Gl. (2.18)) her und bildet auf beiden Seiten den Erwartungswert, ergibt sich $Q_a^A|0\rangle \neq 0 \iff \langle \bar{\Psi}\Psi\rangle_0 \neq 0$.

Äquivalent zum chiralen Kondensat repräsentiert auch die Pionzerfallskonstante f_π ein Maß für die spontane Symmetriebrechung. Dies erkennt man u.a. an der Gell-Mann, Oakes, Renner (GOR) Beziehung, die auch einen Zusammenhang zwischen m_π und m_u bzw.

²Normierung des Zustandsvektors $|\pi_a(p)\rangle$ mit Viererimpuls p^μ : $\langle \pi_a(p)|\pi_b(p')\rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta_{ab}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$.

m_d herstellt (die endliche Pionmasse ist ein Indiz für die explizite Symmetriebrechung):

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -\frac{1}{2}(m_u + m_d)\langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_0 + \mathcal{O}(m_{u,d}^2). \quad (2.20)$$

Aus der führenden Ordnung folgt bei einer Renormierungsskala von 1 GeV mit $m_u + m_d \simeq 13$ MeV (siehe [31]) und annähernder Isospinsymmetrie: $\langle \bar{u}u \rangle_0 = \langle \bar{d}d \rangle_0 \simeq -1.6 \text{ fm}^{-3}$.

Von besonderem Interesse ist in unserem Fall auch das Feynman-Hellmann Theorem, demzufolge das chirale Kondensat eindeutig aus der Gesamtenergie pro Nukleon, $M_N + \bar{E}(k_f)$, abgeleitet werden kann.

Trennt man die Hamiltondichte der QCD, \mathcal{H}_{QCD} , in ihren Anteil im chiralen Limes \mathcal{H}_{QCD}^0 und in die Massenterme (mit $\bar{m}_q = (m_u + m_d)/2$):

$$\mathcal{H}_{QCD} = \mathcal{H}_{QCD}^0 + m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d \approx \mathcal{H}_{QCD}^0 + \bar{m}_q (\bar{u}u + \bar{d}d), \quad (2.21)$$

so gilt für die Energiedichte $\varepsilon_\rho = \langle \rho | \mathcal{H}_{QCD} | \rho \rangle$ eines Zustandes $|\rho\rangle$ mit der Baryondichte ρ das Feynman-Hellmann Theorem:

$$\frac{\partial \varepsilon_\rho}{\partial \bar{m}_q} = \langle \rho | \frac{\partial \mathcal{H}_{QCD}}{\partial \bar{m}_q} | \rho \rangle = \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_\rho. \quad (2.22)$$

Andererseits folgt aus der führenden Ordnung der GOR-Relation (Gl. (2.20) erlaubt es u.a. die Ableitung nach der mittleren Quarkmasse durch die Ableitung nach der Pionmasse auszudrücken ³):

$$\frac{\partial \varepsilon_\rho}{\partial \bar{m}_q} = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \bar{m}_q} + \frac{\partial (\varepsilon_\rho - \varepsilon_0)}{\partial \bar{m}_q} \approx \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_0 \left[1 - \frac{1}{2m_\pi f_\pi^2} \frac{d(\varepsilon_\rho - \varepsilon_0)}{dm_\pi} \right]. \quad (2.23)$$

Kombiniert man die letzten beiden Gleichungen, ergibt sich für die Abhängigkeit des chiralen Kondensats von der Baryondichte:

$$\frac{\langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_\rho}{\langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_0} = 1 - \frac{\rho}{2m_\pi f_\pi^2} \frac{d(M_N + \bar{E}(\rho))}{dm_\pi}. \quad (2.24)$$

Dieses Verhalten werden wir in Kap. 7 kurz analysieren.

Das chirale Kondensat ist ferner eng verbunden mit den Skalen im hadronischen Massenspektrum. Aufbauend auf QCD-Summenregeln zeigt Ioffe's Formel in führender Ordnung,

$$M_N = -\frac{4\pi^2}{\Lambda_B^2} \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle + \dots, \quad (2.25)$$

³Da die Quarkmassen in der QCD (neben einer Renormierungsskala, die in der Hamiltondichte aber nicht vorkommen darf) die einzigen Parameter darstellen, ist die partielle Ableitung hier gleichbedeutend mit einer totalen Ableitung nach der Quarkmasse. Bei der Transformation auf die Pionmasse muss man jedoch die totale Ableitung anschreiben, da in der Energiedichte Skalen, wie z.B. g_A und f_π , vorkommen, die von den Quarkmassen abhängen. Ihre Abhängigkeit von der Pionmasse zeigt sich dann aber nur implizit und darf nicht vernachlässigt werden.

dass die spontane Brechung chiraler Symmetrie einen großen Beitrag zur Masse des Nukleons beisteuert und damit mitverantwortlich dafür ist, dass der niedrigste Anregungszustand (mit Ausnahme der Pseudo-Goldstonebosonen) um etwa Λ_χ vom QCD-Grundzustand getrennt ist.⁴

2.5 Chirale Störungstheorie

Die angesprochene Energielücke im hadronischen Massenspektrum trennt kleine und große Energieskalen (im Vergleich zu Λ_χ) und bietet sich zur Konstruktion einer effektiven Feldtheorie direkt an. Die zugehörige effektive Lagrangedichte gehorcht allen relevanten Symmetrien der fundamentalen Theorie, hier der QCD. Die leichten Teilchen, hier die pseudoskalaren Pionen (wir betrachten weiterhin nur aus u und d aufgebaute Teilchen), werden als aktive Freiheitsgrade eingeführt, während die schweren eingefroren sind. Die Idee der effektiven Feldtheorie (EFT) macht davon Gebrauch, dass die Energien und Impulse der aktiven Freiheitsgrade im betrachteten Energiebereich klein gegen die charakteristische Skala Λ_χ sind, und man betreibt eine systematische Entwicklung in denselben. Diese bezeichnet man im betrachteten Fall als chirale Störungstheorie (χPT).

Zur Konstruktion von \mathcal{L}_{eff} (ohne Baryonen) (vgl. [32, 33]) führt man die Pionen durch eine 2×2 Matrix $U(x) \in SU(2)$ ein, z.B. in folgender, gängiger Darstellung:

$$U(x) = \exp\left(\frac{i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x)}{f_0}\right). \quad (2.26)$$

Hierbei umfasst $\vec{\pi}(x)$ die drei Isospinkomponenten des Pions.

Äquivalent zur Entwicklung nach den Viererimpulsen der Pionen ist eine Entwicklung nach $\partial^\mu U$, wobei die Lorentz-Invarianz nur gerade Potenzen der Ableitungen zulässt (vernachlässige einen irrelevanten, konstanten Term):

$$\mathcal{L}_{eff}(U, \partial^\mu U, \dots) = \mathcal{L}_{eff}^{(2)} + \mathcal{L}_{eff}^{(4)} + \dots \quad (2.27)$$

Der führende Term (das sogenannte nicht-lineare σ -Modell) hat folgende Form:

$$\mathcal{L}_{eff}^{(2)} = \frac{f_0^2}{4} \text{Tr}[\partial^\mu U^\dagger \partial_\mu U] + \frac{m_\pi^2 f_0^2}{2(m_u + m_d)} \text{Tr}[m_q(U + U^\dagger)], \quad (2.28)$$

wobei der zweite Summand die führende Korrektur aufgrund der expliziten Symmetriebrechung (endliche Quarkmassen) ist. Entwickelt man noch bis einschließlich der zweiten Ordnung in $\vec{\pi}$, so erhält man (ein konstanter, bedeutungsloser Term wird wieder vernachlässigt):

$$\mathcal{L}_{eff}^{(2)} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{1}{2} m_\pi^2 \vec{\pi}^2 + \mathcal{O}(\vec{\pi}^4). \quad (2.29)$$

⁴ $\Lambda_B \sim 1 \text{ GeV}$, das Borelmaß, trennt in der Berechnung der QCD-Summenregeln lang- und kurzreichweitige Dynamik.

Das Nukleon als niedrigste Baryon-Anregung des QCD-Vakuums spielt in Überlegungen zur Kernmaterie natürlich die zentrale Rolle, fehlt in der bisherigen baryonenlosen Theorie aber noch völlig. Die entsprechende Erweiterung von \mathcal{L}_{eff} um Baryonen erfordert eine längere Herleitung (vgl. [32]) und wir beschränken uns auf die Angabe des Ergebnisses bis in einschließlich zweiter Ordnung im Pionenfeld (ohne elektromagnetische Kopplungen):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & \bar{\Psi}_N(i\gamma_\mu\partial^\mu - M_N)\Psi_N - \frac{g_A}{2f_\pi}\bar{\Psi}_N\gamma_\mu\gamma_5\vec{\tau}\Psi_N \cdot \partial^\mu\vec{\tau} - \frac{1}{4f_\pi^2}\bar{\Psi}_N\gamma_\mu\vec{\tau}\Psi_N \cdot \vec{\pi} \times \partial^\mu\vec{\pi} \\ & + \frac{\sigma_N}{2f_\pi^2}\bar{\Psi}_N\Psi_N\vec{\pi}^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.30)$$

Der σ_N -Term, $\sigma_N = M_N - M_0$, bezeichnet den Unterschied der physikalischen Nukleonmasse M_N zu ihrem Wert M_0 im chiralen Limes, und g_A ist die Axialvektor-Kopplungskonstante des Nukleons.

Eine Hauptschwierigkeit im Vergleich zum baryonenlosen Fall mit der einzigen großen Skala f_π ist die Existenz des zusätzlichen, dimensionsbehafteten Parameters M_N . Loop-Effekte können von der Ordnung $(M_N/(4\pi f_\pi))^2 \sim 1$ sein, und die Reihenentwicklung wäre dann nicht mehr konsistent. Um wieder ein systematisches Zählschema herzustellen, muss M_N aus $\mathcal{L}_{eff}^{(N)}$ eliminiert werden. Dazu betrachtet man das Nukleon als sehr schwer (“Heavy-Baryon”-Limes), was im Prinzip einer nichtrelativistischen Entwicklung in $1/M_N$ und einer Beschränkung auf die führenden Ordnungen gleichkommt (vgl. [34]).

In früheren Arbeiten zur Pion-Nukleon-Dynamik in Kernmaterie hat sich herausgestellt (siehe [15]), dass auch der niedrigste Anregungszustand des Nukleons von Bedeutung ist. Beschränkt auf den niederenergetischen Bereich reicht es aus, die $\Delta(1232)$ -Anregung aufzugreifen, welche stark ans πN -System koppelt ($g_{\Delta N \pi} \approx 2g_{\pi N}$). Im “Heavy-Baryon”-Limes tritt im Propagator nicht die Masse der Δ -Resonanz selbst auf, sondern nur deren Differenz zur Nukleonmasse, d.h. $\Delta = M_\Delta - M_N$. Diese ist mit $\Delta \approx 293$ MeV von der gleichen Größenordnung wie der Fermiimpuls k_f und zählt damit neben k_f und m_π zu den kleinen Skalen. Deshalb behandeln wir die virtuelle Δ -Anregung explizit, anstatt sie, wie dies oft getan wird, in Niederenergiekonstanten der effektiven Lagrangedichte zu absorbieren (vgl. [35]).

Kapitel 3

Das universale NN-Potential $V_{low k}$

An die kurze Einführung in die QCD und in die daraus abgeleitete chirale Störungstheorie schließt sich eigentlich unmittelbar die Besprechung unserer Methode an. Wir wollen diese kanonische Reihenfolge jedoch unterbrechen, um zunächst noch den dazu komplementären $V_{low k}$ -Ansatz vorzustellen. Dieser zeigt auf, dass im niederenergetischen Bereich eine perturbative Behandlung von Kernmaterie über den langwelligen Grenzfall der freien Nukleon-Nukleon (NN)-Wechselwirkung gerechtfertigt sein kann. Von dieser Aussage machen wir ja auch mittels der chiralen Störungstheorie Gebrauch.

3.1 Grundlagen

Wie in der Einleitung bereits angedeutet ist es problematisch, von Modellen für die freie NN-Kraft auf die Vielnukleon-Wechselwirkung in Kernmaterie zu schließen (für einen Überblick vgl. u.a. auch [36]). Die Möglichkeit über die Aufsummation der In-Medium NN-Streuung in Form der Brückner'schen G-Matrix ist energie- und systemabhängig und benötigt in der numerischen Durchführung meist zusätzliche Näherungen. Lange schien es, als ob eine perturbative Behandlung des Vielnukleonproblems wegen der dominierenden nicht-perturbativen Effekte ausgeschlossen wäre: Allen voran durch den stark repulsiven core bei kleinen Abständen, aber auch durch die iterierte Tensorwechselwirkung und die Anwesenheit (nahezu) gebundener Zustände (Infrarotdivergenzen).

In den letzten Jahren wurde jedoch gezeigt (siehe [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]), dass für ein weiches Potential in Kombination mit dem Pauli-Prinzip, welches im Medium zusätzlich zum Tragen kommt, doch eine störungstheoretische Behandlung von Kernmaterie über die NN-Wechselwirkung möglich ist. Das niederenergetische und, wie sich herausstellt, universale NN-Potential $V_{low k}$ kann dabei aus einem beliebigen realistischen NN-Potential hergeleitet werden.

Es gibt eine Reihe hochpräziser, freier NN-Potentiale, wie z.B. das Argonne $v18$ (vgl. [1]), das CD Bonn (vgl. [2]) u.v.a.. In allen Modellen ist die Beschreibung der langreichwei-

tigen Dynamik durch den Ein-Pion-Austausch identisch. Die zugehörigen, niederenergetischen NN-Eigenschaften sind durch experimentelle Daten (elastische NN-Streuphasen für Laborenergien $E_{lab} < 350$ MeV und niederenergetische Deuteroneigenschaften) eindeutig festgelegt. Diese genügen aber nicht, um auch die attraktive mittel- und die repulsive kurzreichweitige Struktur der NN-Wechselwirkung festzulegen. Die Details dieser nicht-perturbativen Komponenten (für relative Impulse $k > 2.1 \text{ fm}^{-1}$ bzw. relative Abstände $r < 0.5 \text{ fm}$) sind also *nicht* durch experimentelle Ergebnisse eingeschränkt und werden, basierend auf dem Austausch schwerer Mesonen, von Modell zu Modell unterschiedlich angepasst. Daraus resultiert auch die Modellabhängigkeit bei der Brückner-Aufsummation. Offensichtlich hat die genaue Form der kurzreichweitigen NN-Kraft aber keinen Einfluss auf die niederenergetischen NN-Observablen, die ja von allen Modellen reproduziert werden müssen. Es liegt deshalb nahe, zu deren Beschreibung von der vollen, modellabhängigen NN-Kraft auf eine einfache und effektive Kraft überzugehen, die sich auf den experimentell gesicherten, niederenergetischen Bereich beschränkt und damit modellunabhängig ist. Die chirale EFT erreicht dies durch die Beschränkung auf explizite Pion- und Nukleon-Freiheitsgrade und kodiert die schweren, "eingefrorenen" Freiheitsgrade in Kontakttermen. Dadurch entsteht eine modellunabhängige Beschreibung des niederenergetischen NN-Systems, deren Präzision aber oftmals noch nicht die der phänomenologischen Modelle erreicht. Der $V_{low k}$ -Ansatz verbindet die Idee der EFT mit konventionellen NN-Modellen. Ausgehend von einem realistischen NN-Potential wird das universale $V_{low k}$ konstruiert, wobei sichergestellt ist, dass die niederenergetischen und experimentell gesicherten Observablen mit gleicher Präzision wiedergegeben werden. Wie in der chiralen EFT sind aber für das weiche $V_{low k}$ modellabhängige Details über die hohen Impulsbereiche irrelevant.

3.2 Konstruktion des $V_{low k}$ -Potentials und Ergebnisse

Im Folgenden soll die Herleitung des universalen Niederenergiepotentials $V_{low k}$ skizziert werden. Als Ausgangspunkt dient, wie oben beschrieben, ein beliebiges, realistisches NN-Potentialmodell, das notwendigerweise auch die kurzreichweitigen, nicht-perturbativen Effekte berücksichtigt.

Für einen gewählten Streukanal ist die T-Matrix der NN-Streuung (mit Randbedingungen der stehenden Welle) gegeben durch:

$$T(k', k; k^2) = V_{\text{NN}}(k', k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty dq q^2 \frac{V_{\text{NN}}(k', q) T(q, k; k^2)}{k^2 - q^2}. \quad (3.1)$$

Die Streuphasenverschiebungen sind über die Diagonalelemente bestimmt durch $\tan \delta(k) = -kT(k, k; k^2)$.

Nun beschränkt man alle Schleifenintegrale und alle ein- und auslaufenden Impulse der Nukleonen durch einen cut-off Λ und definiert eine analoge Version von Gl. (3.1) für ein

¹Die reelle Größe, die diese Formel beschreibt, bezeichnet man manchmal auch als K-Matrix.

effektives Potential $V_{low k}$:

$$T_{low k}(k', k; k^2) = V_{low k}(k', k) + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\Lambda dq q^2 \frac{V_{low k}(k', q) T_{low k}(q, k; k^2)}{k^2 - q^2}. \quad (3.2)$$

Dieses $V_{low k}$ -Potential soll die gleichen niederenergetischen Zwei-Nukleon Observablen (Streu-phasen, Bindungsenergie des Deuterons, etc.) mit ebenso hoher Genauigkeit reproduzieren wie das volle NN-Modell V_{NN} . Dies zieht folgende Forderung nach sich:

$$T_{low k}(k', k; k^2) = T(k', k; k^2) \quad \text{für } k', k < \Lambda \text{ für beliebige } \Lambda. \quad (3.3)$$

Die Unabhängigkeit der niederenergetischen T-Matrix von Λ führt zu der Renormierungsgruppen (RG)-Gleichung, die den Fluss des $V_{low k}$ in Λ beschreibt:

$$\frac{d}{d\Lambda} V_{low k}(k', k) = \frac{2}{\pi} \frac{V_{low k}(k', \Lambda) T_{low k}(\Lambda, k; \Lambda^2)}{1 - (k/\Lambda)^2}. \quad (3.4)$$

Mit V_{NN} als Anfangsbedingung für große Werte des cut-offs lässt sich daraus $V_{low k}$ numerisch integrieren.² Die RG-Gleichung kann z.B. auch über Bloch-Horowitz oder Lee-Suzuki Transformationen hergeleitet werden (siehe [11]).

Durch die RG-Dezimierung, d.h. die Beseitigung der hohen Impulskomponenten, ist zu erwarten, dass die Modellabhängigkeit der kurzreichweitigen NN-Dynamik weitgehend eliminiert wird. Tatsächlich sind zwei der drei Gründe für nicht-perturbatives Verhalten durch ausreichend kleine cut-offs, $\Lambda \simeq 2.1 \text{ fm}^{-1}$, im $V_{low k}$ nicht mehr vorhanden: Die durch den repulsiven core bedingten Divergenzen stehen, wie erwähnt, in keinem Zusammenhang zu physikalischen Observablen, und deren stark repulsiver Beitrag fällt mit den hohen Impulskomponenten heraus. Das gleiche gilt für den Einfluss der iterierten Tensorbeiträge. Nur der dritte Auslöser nicht-perturbativer Aspekte im Zweinukleonproblem, nämlich die Pole von schwach gebundenen Zuständen, werden als physikalische Observablen nicht durch den cut-off beeinträchtigt. Hier hilft jedoch der Einfluss des Mediums in Form des Pauliprinzips: Sobald die NN-Wechselwirkung innerhalb eines Vielteilchenverbands betrachtet wird, ist der Phasenraum, in den die Nukleonen bei ihrer Wechselwirkung streuen können, deutlich eingeschränkt. Dafür ist neben dem maßgeblichen Pauli-Prinzip auch der cut-off verantwortlich. Ein Verkleinern desselben unterdrückt die problematischen Zwischenzustände immer stärker (vgl. Abb. 3.1). Anschaulich betrachtet, schneidet ein cut-off von $\Lambda \leq 2k_f$ für große Impulse des Nukleonpaares, $P \geq 2k_f$, aber bereits in die Fermikugeln (vgl. Figur 3.1) und man könnte in diesem Fall eine erneute cut-off Abhängigkeit der Observablen befürchten. Es zeigt sich jedoch, dass die Energie pro Teilchen selbst für noch kleinere cut-offs kaum von Λ abhängt und die anschauliche Begrenzung $\Lambda \geq 2k_f$ zu streng ist (siehe [4]).

Über die RG-Gleichung, Gl. (3.4), wird also aus einer vollen NN-Wechselwirkung mit nicht-

²Da die RG-Gleichung asymmetrisch in k und k' ist, wird das erhaltene $V_{low k}$ nicht hermitesch sein. Dies kann durch die Verwendung einer symmetrisierten Version von Gl. (3.4) behoben werden.

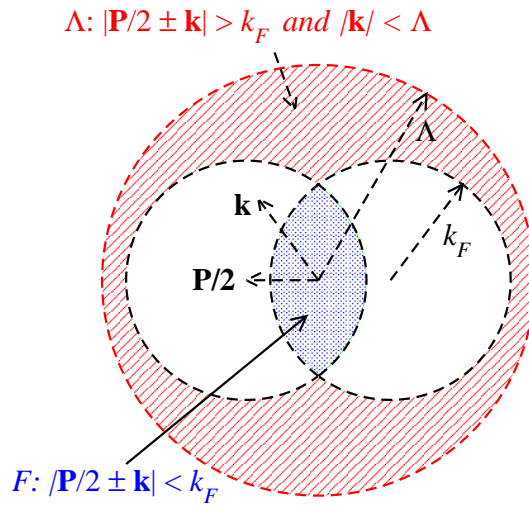


Abbildung 3.1: Phasenraum der mit dem Pauli-Prinzip vereinbaren Zwischenzustände (schraffierter Bereich Λ) für Nukleon-Nukleon-Streuung. Der Gesamtimpuls der beiden Nukleonen ist P und sie befinden sich anfangs im Fermisee F . Die Wechselwirkung ist auf Impulse kleiner als Λ beschränkt. Figur aus [4] entnommen.

perturbativen Anteilen das effektive Potential $V_{low k}$ entwickelt, welches nur den durch Experimente festgelegten Niederenergiebereich unterhalb des cut-offs beschreibt. Die Details der kurzreichweitigen NN-Dynamik spielen keine Rolle mehr. Ihre detailunabhängigen Auswirkungen auf die niederenergetischen Phänomene sind jedoch über die Λ -Abhängigkeit des $V_{low k}$ berücksichtigt. Die Skalierung des $V_{low k}$ -Potentials mit Λ kann über die RG-Gleichung direkt untersucht werden. Verringert man Λ , so zeigt sich, dass die Diagonalmatrixelemente des $V_{low k}$ für die verschiedenen V_{NN} (den Ausgangspunkten in der RG-Gleichung) schließlich auf eine universale Kurve kollabieren (vgl. Abb. 3.2). Dies geschieht für $\Lambda \simeq 2.1 \text{ fm}^{-1}$ (was in der NN-Streuung einer Laborenergie von etwa 350 MeV entspricht). Die hohen Impulskomponenten renormieren die niedrigen dann zu einem universalen $V_{low k}$.

Damit ist anschaulich verdeutlicht, dass das auf den niederenergetischen Bereich beschränkte NN-Potential perturbativ auf Vielteilchensysteme angewendet werden kann. Auch früher gab es bereits zahlreiche Ansätze mit einem weichen NN-Potential (vgl. [4] und darin enthaltene Referenzen), die sich jedoch alle als unfähig herausgestellt hatten, Kernmaterieeigenschaften zu reproduzieren (zu starke Bindung bei zu hohen Dichten).

Dies ist auf fehlende Vielnukleonen-Kräfte in diesen Modellen zurückzuführen. Sie fehlen auch noch im vorliegenden Ansatz mit dem $V_{low k}$ -Potential, sobald man dieses in Betrachtungen von Kernmaterie anwendet.

Die Frage ist nun, wie groß die Rolle dieser Vielkörper-Wechselwirkungen ist. Es hat sich herausgestellt, dass insbesondere Dreikörperterme (gerade zur Beschreibung leichter Kerne) eine wesentliche Rolle spielen und explizit behandelt werden müssen. Wechselwirkungen mit mehr als drei Nukleonen sind dagegen meistens vernachlässigbar.

Die Einarbeitung der 3N-Kräfte in den $V_{low k}$ -Ansatz stößt aber auf Schwierigkeiten, da die

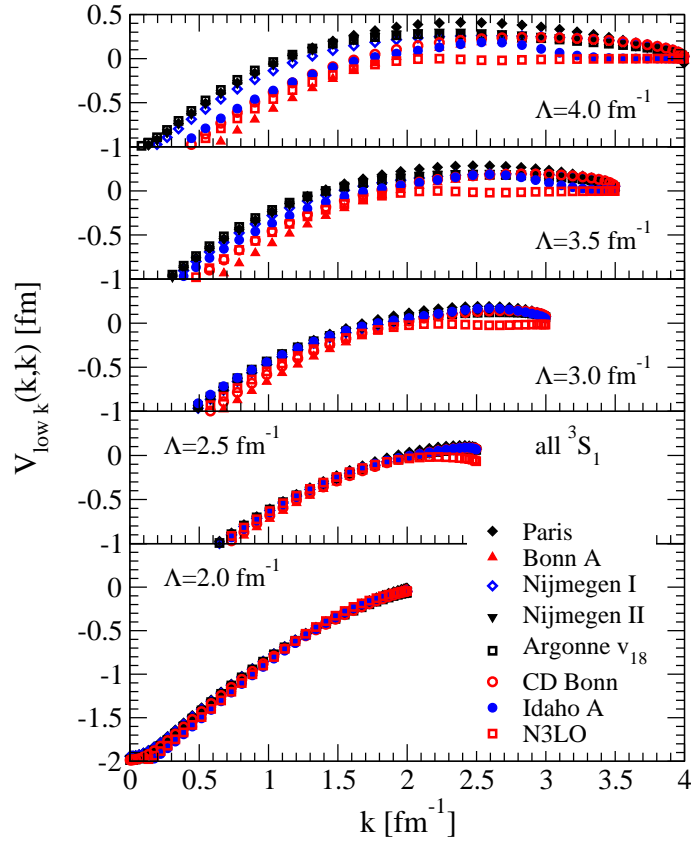


Abbildung 3.2: Entwicklung der Diagonalmatrixelemente des $V_{low k}$ -Potentials für verschiedene Λ als Funktion des Relativimpulses im 3S_1 -Kanal. Figur aus [6] übernommen.

RG-Gleichung für ein kombiniertes Zwei- und Drei-Nukleonen-System noch nicht existiert. Zum einen würde dies eine sehr genaue Kenntnis der 3N-Streuwellenfunktionen erfordern und zum anderen gibt es mit Ausnahme der chiralen EFT keine konsistente Behandlung, die eine Beziehung herstellt zwischen den vollen V_{NN} -Potentialmodellen und ihren angepassten Drei-Nukleon-Kräften. Deshalb wird das Dreikörperpotential für jeden cut-off einzeln an die führende Ordnung der Dreinukleonenkraft aus chiraler EFT angepasst. Letztere umfasst in führender Ordnung den langreichweitigen Ein-Pion-Austausch, den mittelreichweitigen Zwei-Pion-Austausch und eine kurzreichweitige Kontaktwechselwirkung (siehe [6] und dort enthaltene Quellen). Die Parameter werden für jedes Λ durch die Bindungsenergien von ${}^3\text{H}$ und ${}^4\text{He}$ in isospin-symmetrischer Kernmaterie festgelegt (siehe [7]).

Es zeigt sich, dass sich für $\Lambda \leq 2.1 \text{ fm}^{-1}$ auch die so ermittelten Dreikörperterme perturbativ behandeln lassen. Konkret ist damit $\langle \Psi^{(3)} | V_{3N} | \Psi^{(3)} \rangle \approx \langle \Psi^{(2)} | V_{3N} | \Psi^{(2)} \rangle$ gemeint ($|\Psi^{(n)}\rangle$ sei eine exakte Lösung, die alle Wechselwirkungen zwischen maximal n -Teilchen berücksichtigt).

Verwendet man das weiche $V_{low k}$ -Potential nun in Hartree-Fock Rechnungen, um die Energie pro Teilchen in isospin-symmetrischer Kernmaterie zu ermitteln, so wird deutlich (vgl.

Abb. 3.3 links), dass die Sättigung von Kernmaterie tatsächlich erst durch Einführung der Dreikörperkräfte erreicht werden kann. Man findet dann im untersuchten cut-off Bereich ein Minimum von $\bar{E} \approx -(2.5 - 8)$ MeV für $k_{f,0} \approx (1.1 - 1.3)$ fm^{-1} .

Die Sättigungskurve ist näher zum empirischen Wert des Sättigungspunktes verschoben, sobald noch Korrekturen zweiter Ordnung (für Details vgl. [4]) hinzugenommen werden und man erhält $\bar{E} \approx -(11 - 12)$ MeV für $k_{f,0} \approx (1.2 - 1.35)$ fm^{-1} . Die cut-off Abhängigkeit ist dann zudem drastisch reduziert (vgl. Figur 3.3 rechts).

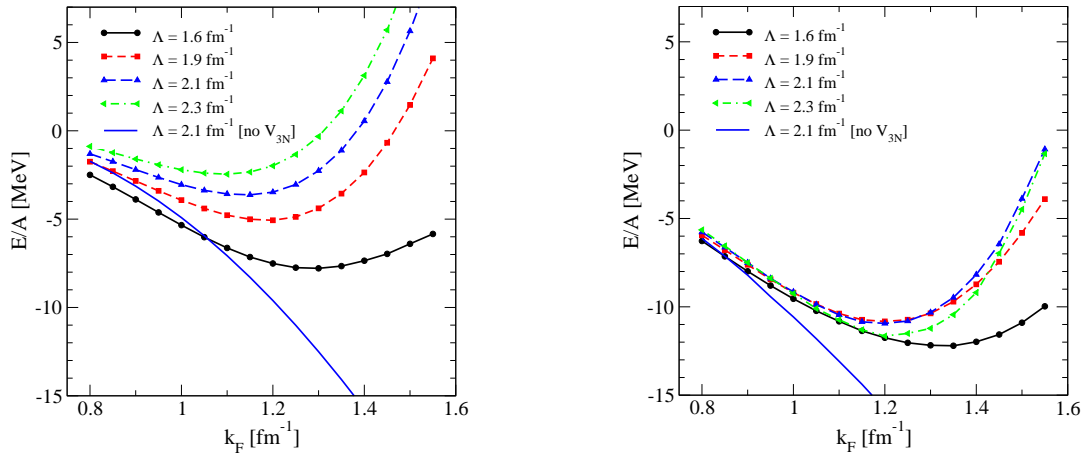


Abbildung 3.3: Mit dem $V_{low k}$ -Potential und V_{3N} berechnete Hartree-Fock Ergebnisse (links) und Hartree-Fock Ergebnisse plus dominante Korrekturen zweiter Ordnung (rechts) (Abb. aus [4] entnommen).

Das universale $V_{low k}$ -Potential in Kombination mit Dreikörpertermen ist ein durchaus vielversprechender Weg zu einer systematischen Behandlung des nuklearen Vielteilchenproblems. Nochmals kurz zusammengefasst, lässt er sich wie folgt beschreiben: Man startet mit einem NN-Potential, das die experimentell gesicherten Niederenergieobservablen mit hoher Genauigkeit reproduziert. Den zugehörigen, in der Regel sehr großen Phasenraum dezimiert man durch einen cut-off nun auf einen viel kleineren Impulsraum im Niederenergiebereich, so dass die erfassten Zweikörper-Observablen aber immer noch ebenso genau reproduziert werden. Die modellabhängigen Beiträge von hohen Impulsen werden also in den Niederenergiebereich transferiert und führen so zum universalen $V_{low k}$. Mit diesem resultierenden, weichen NN-Potential ist eine perturbative Behandlung von Kernmaterie gerechtfertigt und auch erfolgreich, sobald Dreikörperkräfte mitberücksichtigt werden.

Auch unser Ansatz baut auf einer perturbativen Beschreibung von Kernmaterie auf, der im Folgenden erklärt werden soll. Im Gegensatz zum $V_{low k}$ -Ansatz betreiben wir aber keine Ableitungen ausgehend von phänomenologischen V_{NN} -Potentialmodellen, sondern berechnen systematisch den expliziten Pionenaustausch zwischen Nukleonen im Rahmen von chiraler Störungstheorie. Da unser Ansatz sich auf die gleiche langreichweitige Dynamik beschränkt, ist dennoch eine gewisse Übereinstimmung mit dem $V_{low k}$ -Verfahren zu erwarten.

Kapitel 4

Die Zustandsgleichung von isospin-symmetrischer Kernmaterie

In diesem Kapitel knüpfen wir an die Einführung in die chirale Störungstheorie im Medium (Abschnitt 2.5) an und stellen unsere Rechnungen zu isospin-symmetrischer Kernmaterie explizit vor. Im Gegensatz zum $V_{low k}$ -Ansatz benötigen wir kein empirisches Nukleon-Nukleon Potentialmodell als Ausgangspunkt sondern bauen die Betrachtungen direkt auf allgemeinen Prinzipien auf. Zu Beginn werden die Grundlagen erläutert und die verwendeten Feynmanpropagatoren und Vertizes vorgestellt. Dann folgt eine kurze Beschreibung früherer Rechnungen, die durch die Einführung einer π NN-Vertexfunktion modifiziert werden. Die resultierenden Formeln für isospin-symmetrische Kernmaterie stellen wir anschließend im Detail dar und werten sie bezüglich des Sättigungsverhaltens ausführlich aus.

4.1 Grundlagen

Die Energiedichte $\varepsilon(k_f)$ des Grundzustands von Kernmaterie (ρ : Nukleonendichte) berechnet sich aus der Summe aller unverbundenen Feynmandiagramme (also aller geschlossenen Graphen ohne äußere Linien), die zusätzlich mit der imaginären Einheit i zu multiplizieren ist. Dies lässt sich aus einer störungstheoretischen Behandlung der Zwei-Punkt Korrelationsfunktion wechselwirkender Felder ableiten und beispielsweise in [37], Kap. 4.4, nachlesen.

Die Zustandsgleichung in Form der Energie pro Teilchen (abzüglich der Ruheenergie des freien Nukleons) ergibt sich dann zu:

$$\bar{E}(k_f) = \frac{\varepsilon(k_f)}{\rho(k_f)} - M_N. \quad (4.1)$$

Dieser allgemeine Ansatz soll nun mittels der chiralen Störungstheorie (χ PT) bearbeitet, d.h. konkret in Potenzen des Fermiimpulses k_f entwickelt werden. Dabei ist zu beachten, dass in der Umgebung des empirischen Sättigungspunktes die Pionmasse m_π in der gleichen

Größenordnung wie $k_{f,0}$ liegt ($m_\pi \approx k_{f,0}/2$), d.h. ebenfalls klein im Vergleich zur charakteristischen Skala der χ PT ist. Das Verhältnis $k_f/m_\pi =: u$ ist demnach von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und darf nicht entwickelt werden, was der chiralen Entwicklung von Gl. (4.1) folgende allgemeine Form gibt:

$$\bar{E}(k_f) = \sum_n F_n(u) \cdot k_f^n. \quad (4.2)$$

Unter der Annahme, dass diese Entwicklung konvergiert und k_f hinreichend klein ist, brechen wir in unseren Rechnungen nach der fünften Potenz im Fermiimpuls ab:

$$\bar{E}(k_f) = \sum_{n=1}^5 F_n(u) \cdot k_f^n. \quad (4.3)$$

Die nicht-trivialen Koeffizienten dieser Entwicklung sollen nun (abgesehen von der kinetischen Energie) explizit über Feynmandiagramme berechnet werden. Eben weil die Pionmasse, wie bereits erwähnt, von der gleichen Größenordnung wie der Fermiimpuls ist, führen wir die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen im betrachteten Energiebereich ausschließlich auf Pion austauschprozesse zurück.

Zunächst muss man sich überlegen, welche der Vakuumpgraphen bis zur Ordnung k_f^5 beitragen. Eine erste, einfache Abschätzung (analog zu [37], Kap. 10) sagt für ein Diagramm mit L Schleifen einen Term

$$\bar{E}_L(k_f) = k_f^{2L-1} F_{2L-1}(u) \quad (4.4)$$

voraus, wie folgendes Argument zeigt:

Sei L die Anzahl aller Schleifen (nicht nur der reinen Fermionschleifen), P_N bzw. P_π die Anzahl der Nukleon- bzw. Pionpropagatoren und V die Anzahl der Vertizes. Setzt man die Energiedichte $\varepsilon(k_f)$ Schritt für Schritt mit den Feynmanregeln an, so erscheint k_f mit der Potenz:

$\tilde{D} := (\text{Exponent von } k_f \text{ im Zähler}) - (\text{Exponent von } k_f \text{ im Nenner}) = 4L - P_N - 2P_\pi + V$, wobei der erste Term aus den Schleifenintegrationen resultiert. Geht man von der Energiedichte auf die Energie pro Teilchen über, reduziert sich \tilde{D} nochmals um 3 und man erhält $D = 4L - P_N - 2P_\pi + V - 3$ als Potenz von k_f .

Betrachten wir konkret das Beispieldiagramm in Abb. 4.1, welches zum irreduziblen Zwei-Pion-Austausch zählt und $L = 3$ Schleifen umfasst. Mit jedem der vier Vertizes ist ein Pion verbunden und jeder Pionpropagator grenzt stets an zwei Vertizes, also gilt $V = 2P_\pi = 4$ und ferner $P_N = 4$. Es ergibt sich somit $\tilde{D} = 2L + 2 = 8$ bzw. $D = 2L - 1 = 5$. Das betrachtete Diagramm mit $L = 3$ Schleifen trägt also in fünfter Potenz von k_f zur Energie pro Teilchen bei.

Analog lässt sich für die meisten Feynmandiagramme der Zusammenhang $D = 2L - 1$ finden. Dieser Regel zufolge wäre eine Rechnung bis zur Ordnung k_f^5 gleichbedeutend mit einer Kalkulation aller Diagramme mit bis zu *drei Schleifen* (Loops).

Allerdings gibt es Ausnahmen von der “ $(2L-1)$ -Regel”. Beim iterierten Ein-Pion-Austausch beispielsweise steht im Energienenner die Differenz der kinetischen Energien zweier Nukleonen, wodurch in der führenden nichtrelativistischen Ordnung die große Nukleonmasse M_N

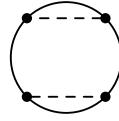


Abbildung 4.1: Beispieldiagramm des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches zur Demonstration der “ $(2L - 1)$ -Regel”. Die durchgezogene Linie stellt den Propagator eines Nukleons dar, welches auch im angeregten Δ -Zustand vorliegen kann.

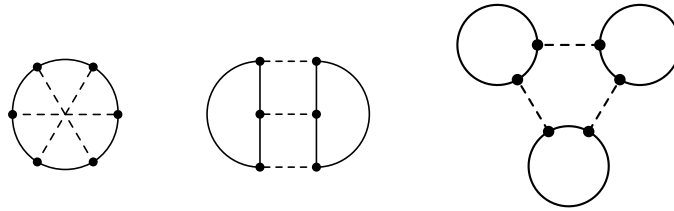


Abbildung 4.2: Vier-Loop-Diagramme mit doppelt iteriertem Ein-Pion-Austausch bzw. mit drei Nukleonschleifen (rechts).

im Zähler steht (vgl. dazu auch [35]). Die Eins-Eins-Korrespondenz zwischen der Schleifen- und der chiralen Entwicklung in k_f ist gestört: Der iterierte Ein-Pion-Austausch trägt in der Ordnung k_f^4 bei und nicht erst, wie von einem Drei-Loop-Diagramm erwartet, in der Ordnung k_f^5 . Dementsprechend ist auch damit zu rechnen, dass z.B. das Vier-Loop-Fockdiagramm in Abb. 4.2 links, das den doppelt iterierten Ein-Pion-Austausch ($\propto M_N^2$) beschreibt, bereits zur Ordnung k_f^5 beiträgt.¹ Die Berechnung dieses Diagramms ist jedoch äußerst schwierig, und die vorliegende Arbeit beschränkt sich generell auf die Drei-Loop-Ordnung, obwohl dadurch einige Beiträge zur Ordnung k_f^5 fehlen. Selbst andere Vier-Loop-Graphen, die bereits zur Ordnung k_f^5 beitragen und deren analytisches Ergebnis bekannt ist (wie z.B. das Diagramm mit drei Nukleonringen, vgl. Abb. 4.2 und Anhang von [13]) werden konsequenterweise weggelassen. Die beschriebene Tatsache wollen wir nochmals betonen: Wir betrachten systematisch alle führenden nichtrelativistischen Terme in Drei-Loop-Ordnung, was nicht ganz exakt mit einer Entwicklung bis einschließlich k_f^5 übereinstimmt.

In die Berechnung der zugehörigen Graphen fließen die bekannten Feynmanregeln ein. Im Folgenden werden dazu noch einige Details geklärt und andere verwendete Größen vorgestellt.

In den einzelnen Diagrammen muss das Medium, d.h. die Anwesenheit eines gefüllten Fermisees von Nukleonen, in Form des Pauli-blockings im **Nukleonpropagator** berücksichtigt werden. Dadurch nimmt letzterer in der Impulsraumdarstellung für die Temperatur

¹Das zugehörige Hartreeddiagramm in Abb. 4.2 Mitte, verschwindet beim Auswerten der Spin- bzw. Diracspuren.

$T = 0$ folgende Form an (mit Viererimpuls p des propagierenden Nukleons):

$$\begin{aligned}
 S_F(p) &= \frac{i(\not{p} + M_N)}{p^2 - M_N^2 + i\epsilon \operatorname{sgn}(|\vec{p}| - k_f)} \\
 &= (\not{p} + M_N) \left[\underbrace{\frac{i}{p^2 - M_N^2 + i\epsilon}}_{\text{freier Anteil}} - \underbrace{2\pi\delta(p^2 - M_N^2)}_{\text{Medieneinschub}} \Theta(k_f - |\vec{p}|) \Theta(p_0) \right].^2 \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

In Gl. (4.5) handelt es sich um den voll relativistischen Propagator. Der Übergang zum nichtrelativistischen Limes durch Entwicklung in $1/M_N$ erfolgt bei dessen Verwendung erst nach der vollständigen Formulierung der relativistischen Energiedichte des jeweiligen Diagramms und der Spurbildung.

Die additive Zerlegung des Nukleonpropagators in einen freien Teil (im Feynmangraph symbolisiert durch eine Linie mit Pfeil) und einen Medienanteil (gekennzeichnet durch eine Linie mit doppeltem Querstrich) ist zum einen anschaulich und minimiert zum anderen den Rechenaufwand. Dies lässt sich exemplarisch für den Ein-Pion-Austausch zeigen. Das zugehörige Feynmandiagramm kann analog zur Zerlegung in Gl. (4.5) in vier Beiträge aufspalten werden, vgl. Abb. 4.3: Das linke Diagramm und allgemein jedes Diagramm ohne

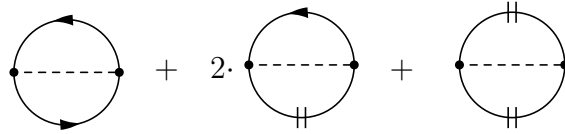


Abbildung 4.3: Zerlegung des Feynmangraphen des Ein-Pion-Austausches.

Medieneinschub tragen zu einer nicht messbaren Verschiebung der Vakuumenergie bei. Das mittlere Diagramm und allgemein jedes Diagramm mit genau einem Medieneinschub sind in der Renormierung der freien Nukleonmasse auf ihren physikalischen Wert M_N enthalten. (Wir verwenden als Mittelwert zwischen Proton- und Neutronmasse $M_N = 939$ MeV).

Man kann sich also großen Aufwand sparen, indem man von Anfang an nur die Diagramme mit *mindestens zwei Medieneinschüben* untersucht, welche eine messbare Verschiebung der Energiedichte gegen das freie Fermigas, den Vakuumgrundzustand, beschreiben.

Als **Pion-Nukleon-Vertizes** treten bis zur betrachteten Ordnung der chiralen Entwicklung nur der Pseudovektor π NN-Vertex und der Tomozawa-Weinberg $\pi\pi$ NN-Vertex auf (vgl. [32]):

$$\frac{g_A}{2f_\pi} \not{q}_a \gamma_5 \tau_a \quad \text{und} \quad \frac{1}{4f_\pi^2} (\not{q}_b - \not{q}_a) \epsilon_{abc} \tau_c. \quad (4.6)$$

Die Pion-Viererimpulse q sind dabei jeweils als aus dem Vertex auslaufend definiert. Als Wert für die axiale Nukleonkopplungskonstante verwenden wir $g_A = 1.3$, was sich mittels

²Eine kurze Wiederholung der Herleitung ist im Anhang A zu finden.

der Goldberger-Treiman-Beziehung (vgl. z.B. [38]) in eine π NN-Kopplungskonstante von $g_{\pi NN} = (M_N/f_\pi)g_A = 13.2$ übersetzt und gut mit dem empirischen Wert aus der Analyse von π N-Dispersionsrelationen (siehe [39]) übereinstimmt. Für die Pionzerfallskonstante setzen wir $f_\pi = (92.4 \pm 0.3) \text{ MeV}$ ein (vgl. [31]).

Wie bereits in der Einführung in 2.5 bemerkt, ist es angebracht, virtuelle $\Delta(1232)$ -Anregungen in den Zwischenzuständen des Nukleons explizit zu berücksichtigen, da die Massendifferenz $\Delta = M_\Delta - M_N = 293 \text{ MeV}$ klein gegen die Skala Λ_χ der chiralen Symmetriebrechung ist. Im nichtrelativistischen Grenzfall erhält man für den **Δ -Propagator** und den $\Delta \rightarrow \pi^a \text{N}$ Vertex (vgl. [40] und dort angegebene Referenzen)³:

$$\frac{i}{k_0 - \Delta + i0^+} \quad \text{und} \quad -\frac{3g_A}{2\sqrt{2}f_\pi} \vec{S} \cdot \vec{l} T_a. \quad (4.7)$$

Hierbei bezeichnet k^0 die Energie des propagierenden Δ (abzüglich der großen Nukleonmasse, d.h. modulo M_N) und l^μ den Viererimpuls des emittierten Pions mit Isospinindex a . Die 2×4 Spin- und Isospinmatrizen S_i und T_a erfüllen die Beziehungen $S_i S_j^\dagger = (2\delta_{ij} - i\epsilon_{ijk}\sigma_k)/3$ und $T_a T_b^\dagger = (2\delta_{ab} - i\epsilon_{abc}\tau_c)/3$.

In Feynmangraphen symbolisieren wir die $\Delta(1232)$ -Anregung durch eine dicke Linie mit Pfeil.

Mit diesen Hilfsmitteln lässt sich die Energiedichte der einzelnen Diagramme nun systematisch berechnen. Um dann mittels Gl. (4.1) auf die Energie pro Teilchen zu kommen, benötigt man noch den Ausdruck für die **Baryondichte** $\rho(k_f)$. In isospin-symmetrischer Kernmaterie bei der Temperatur $T = 0$ sind die Fermiseen von Neutronen und Protonen gleich hoch gefüllt und die Dichte ergibt sich als Funktion des Fermiimpulses zu:

$$\rho(k_f) = 4 \cdot \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \Theta(k_f - |\vec{p}|) = \frac{2k_f^3}{3\pi^2}. \quad (4.8)$$

Der Faktor 4 resultiert aus den möglichen Spin- und Isospineinstellungen des Nukleons. Unsere Rechnungen beziehen sich auf Kernmaterie *homogener Dichte* und *unendlicher Ausdehnung*, d.h. Oberflächen- und Randeffekte werden nicht berücksichtigt.

Der konkreten Berechnung der Zustandsgleichung von isospin-symmetrischer Kernmaterie in Form der Energie pro Teilchen steht nun nichts mehr im Wege. Die Ausführung der Integrationen ist teilweise jedoch sehr anspruchsvoll, und nicht in jedem Fall erreicht man ein geschlossenes Ergebnis.⁴

³Beachte, dass die Diagramme mit virtuellen Δ -Anregungen, die explizit über die Feynmanregeln mit dem nichtrelativistischen Δ -Propagator bzw. -Vertex berechnet werden, dann von Anfang an nichtrelativistisch anzusetzen sind - mit den entsprechenden Formen von Gl. (4.5) und Gl. (4.6).

⁴Ein kleiner technischer Hinweis: Wir benutzten für die Rechnungen Mathematica, zumeist in der Version 5.0. Dort tauchte u.a. folgender Fehler auf: Führt man eine Integration durch mit anschließender Transformation einer anderen Variablen, so ergab sich häufig nicht das gleiche wie in umgedrehter Vorgehensreihenfolge. Ferner sei angemerkt, dass die Version 4.1 oft für komplizierte Integrale vernünftiger Darstellungen der Ergebnisse ausgibt als die neueren Versionen.

Im folgenden Abschnitt gehen wir kurz auf die bereits existenten Rechnungen und deren Ergebnisse ein und zeigen auf, welche Aspekte wir dabei noch verbessern wollen.

4.2 Frühere Rechnungen bei der Temperatur $T = 0$

In seiner Diplomarbeit (siehe [13], auch [17, 16, 18]) berechnete Stefan Fritsch alle Beiträge mit bis zu drei Schleifen ohne explizite $\Delta(1232)$ -Anregungen. Divergente Anteile von Schleifenintegralen im Zwei-Pion-Austausch wurden isoliert mittels eines cut-offs Λ im Impulsraum regularisiert: Aus dem iterierten Ein-Pion-Austausch ergibt sich ein Term linear in Λ , aus dem irreduziblen Zwei-Pion-Austausch ein Beitrag proportional zu Λ^2 bzw. zu $\ln \frac{m_\pi}{2\Lambda}$. Diese Terme können auch als nullreichweitige NN-Kontaktwechselwirkung interpretiert werden und parametrisieren die zur Sättigung von Kernmaterie nötigen kurzreichweitigen Effekte.⁵ Durch die Feinjustierung des einzigen freien Parameters Λ auf $\Lambda \approx 646$ MeV durchläuft die Sättigungskurve ein festgesetztes Energieminimum von $\bar{E}_0 = -15.26$ MeV (verwendeter empirischer Wert) bei einer Sättigungsdichte von $\rho_0 \approx 0.178 \text{ fm}^{-3}$. Dies entspricht einem Fermiimpuls von $k_{f,0} \approx 272.2$ MeV. Die Zustandsgleichung von isospin-symmetrischer Kernmaterie wird demnach gut reproduziert und auch die Kompressibilität $\kappa \approx 255$ MeV liegt im empirisch ermittelten Bereich.

Die bereits nach der Ordnung k_f^4 abgebrochene chirale Entwicklung (also ohne den irreduziblen Zwei-Pion-Austausch) kann den Sättigungspunkt mit einem etwas geringeren cut-off von $\Lambda \approx 611$ MeV ebenfalls reproduzieren. Die Beiträge der Ordnung in k_f^5 (ohne Δ -Resonanzen) spielen offensichtlich nur eine geringe Rolle, was auf die Konvergenz der chiralen Entwicklung hoffen lässt.

Betrachtet man den chiralen Limes (bis in Ordnung k_f^4), so lässt sich der zugrunde liegende Sättigungsmechanismus als Zusammenspiel eines attraktiven k_f^3 - und eines repulsiven k_f^4 -Terms erklären. Dass auch im Fall masseloser Pionen Sättigungsverhalten auftritt, deutet darauf hin, dass die explizite chirale Symmetriebrechung nicht entscheidend für die Bindung von Kernmaterie ist.

Mit dem gewonnenen cut-off von $\Lambda = 646$ MeV wurden im gleichen Rahmen bis einschließlich k_f^5 die Asymmetrieenergie, die Zustandsgleichung von reiner Neutronenmaterie, sowie das effektive Einteilchenpotential betrachtet. Der Wert der Asymmetrieenergie von $\bar{A}_0(k_{f,0}) \approx 33.8$ MeV bei Sättigungsdichte stimmt hervorragend mit dem empirischen Wert von 33.2 MeV (siehe [42]) überein, wo aufwändige Anpassungen an Nuklidmassen durchgeführt wurden. Neutronenmaterie erweist sich als ungebunden, und das effektive Einteilchenpotential hat eine Tiefe von $\bar{U}(0, k_{f,0}) \approx -53.2$ MeV.

⁵Ein ähnlicher Ansatz bis zur Ordnung k_f^4 findet sich, wie bereits in der Einleitung erwähnt, auch in [19, 20]. Dort wird allerdings eine attraktive, nullreichweitige Kontaktwechselwirkung eingeführt auf deren Stärke die Sättigung sehr sensitiv ist. Sowohl die Herkunft als auch die Iteration dieser Wechselwirkung mit sich selbst und dem Ein-Pion-Austausch werfen Fragen auf. Zudem ist die Tiefe des damit berechneten Einteilchenpotentials für das ruhende Nukleon mit $\bar{U}(0, k_{f,0}) \approx -20 \text{ MeV}$ viel zu klein und die effektive Masse an der Fermikante stellt sich als negativ heraus, da $\bar{E}_{kin} + \bar{U}(|\vec{p}|, k_{f,0})$ nicht monoton mit dem Betrag des Nukleonimpulses $|\vec{p}|$ steigt (vgl. [41]).

Besonders hervorzuheben ist nochmals, dass neben der cut-off Regularisierung keine zusätzlichen Kontaktterme benötigt wurden, um kurzreichweitige Prozesse jenseits der Gültigkeit der chiralen Entwicklung zu parametrisieren.

Es traten jedoch auch Probleme auf. Sowohl die Asymmetrieenergie, als auch die Energie pro Teilchen in reiner Neutronenmaterie sind konvex und krümmen sich für $\rho > 0.2 \text{ fm}^{-3}$ wieder zu kleineren Werten. Das Einteilchenpotential wird von relativistischen Dirac-Brückner-Rechnungen etwas tiefer vorhergesagt und vor allem monoton mit dem Betrag des Nukleonimpulses $|\vec{p}|$ anwachsend. Dies ist in den Ergebnissen für $|\vec{p}| > 180 \text{ MeV}$ nicht der Fall. Die effektive Masse an der Fermikante ergibt sich dadurch mit $M_N^*(k_{f,0}) \approx 3.5M_N$ als deutlich zu groß.

Um diese Mängel zu beheben, wurden die beim Zwei-Pion-Austausch in den Zwischenzuständen des Nukleons möglichen $\Delta(1232)$ -Anregungen explizit miteinbezogen (siehe [15]). Sie spielen beispielsweise auch bei niederenergetischer Pion-Nukleon-Streuung eine große Rolle. Die kurzreichweitige Dynamik wurde jetzt durch Zweikörper- und Dreikörper-Kontaktterme (proportional zu ρ bzw. $\rho^{5/3}$ und ρ^2) repräsentiert, wodurch die Rechnung neben Λ nun drei Parameter enthält. Mit diesen lässt sich der empirische Sättigungspunkt sehr gut reproduzieren. Setzt man die gewonnenen Parameterwerte in der Asymmetrieenergie und der Zustandsgleichung von Neutronenmaterie ein, so wachsen diese nun erwartungsgemäß monoton in der Dichte. Auch das effektive Einteilchenpotential zeigt ein realistisches Verhalten und führt an der Fermikante zu einer effektiven Masse von $M_N^*(k_{f,0}) \approx 0.88M_N$.

Die bereits existenten Rechnungen erweisen sich demnach als äußerst erfolgreich in der Beschreibung von Kernmaterie. Trotzdem werfen sie noch einige Unstimmigkeiten auf, die im Folgenden beleuchtet werden:

- Trotz der Beschränkung auf den niederenergetischen Bereich ist es nicht selbstverständlich, dass die Wechselwirkung von Pion und Nukleon als punktförmig angesehen werden darf.
- Mit dem cut-off Λ erscheint neben f_π und M_N eine weitere große Skala in der chiralen Entwicklung und es muss sorgfältig untersucht werden, ob das Zählschema noch sinnvoll ist.
- Jedes Vakuumdiagramm liefert einzeln einen Beitrag zur Energie pro Teilchen, der von der gleichen Größenordnung ist wie die gesamte Bindungsenergie selbst. Dass der empirische Sättigungspunkt so gut reproduziert werden kann, ist damit die Folge einer sehr sensitiven Balance zwischen großen attraktiven und repulsiven Beiträgen. Der cut-off Λ muss sehr sorgfältig feinjustiert werden. Es wäre wünschenswert betragsmäßig kleinere Einzelbeiträge aufzuaddieren und damit die Auswertung gegen geringe Schwankungen von Λ zu stabilisieren.
- Die Einzelbeiträge werden unterschiedlich behandelt, da ausschließlich die divergenten Anteile von Schleifenintegralen mit dem cut-off regularisiert werden. Das Ab-

schneiden hoher Impulskomponenten hat aber in erster Linie zum Ziel, kurzreichweitige Effekte, die außerhalb der Gültigkeit der betrachteten niederenergetischen Theorie liegen, aus derselben auszuklammern. Deshalb müssen die hohen Impulskomponenten, die zu konvergenten Schleifenintegralen genauso beitragen, für *jeden* Beitrag (egal ob konvergent oder nicht) ausgenommen werden.

Die genannten Kritikpunkte sollen in der vorliegenden Arbeit beseitigt werden. Dazu greifen wir den erstgenannten Aspekt auf und führen eine π NN-Vertexfunktion ein.

4.3 Die π NN-Vertexfunktion

Jedem Wechselwirkungsververtex von Pionen und Nukleonen (welche auch im angeregten Δ -Zustand sein können) wird nun zusätzlich eine π NN-Vertexfunktion vom Typ eines Monopolformfaktors zugeordnet:

$$F_{\Lambda}(q^2) = \frac{\Lambda^2 - m_{\pi}^2}{\Lambda^2 - q^2} = \frac{1 - r^2}{1 - r^2 \frac{q^2}{m_{\pi}^2}}. \quad (4.9)$$

Λ bezeichnet die Monopolmasse ($m_{\pi} < \Lambda < \infty$) und q den Viererimpuls des Pions. Der für die konkreten Rechnungen etwas einfacher zu handhabende und dimensionslose Parameter r wird definiert als $r := m_{\pi}/\Lambda$.

Das Pion muss als virtuelles Teilchen nicht die Energie-Impuls-Beziehung $q^2 = m_{\pi}^2$ erfüllen. Die Vertexfunktion ist jedoch so konstruiert, dass sie für ein on-shell Pion die π NN-Kopplungskonstante nicht verändert, d.h.

$$F_{\Lambda}(m_{\pi}^2) = 1. \quad (4.10)$$

Die weiteren Eigenschaften der π NN-Vertexfunktion als Funktion von q^2 kann man sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit z.B. im Breitsystem (kein Energieübertrag zwischen den Nukleonen) klar machen. Dort gilt $q^0 = 0$ und damit $F_{\Lambda}(\vec{q}^2) = \frac{\Lambda^2 - m_{\pi}^2}{\Lambda^2 + \vec{q}^2}$. Der Betrag dieser Funktion fällt von seinem endlichen Startwert monoton mit wachsendem \vec{q}^2 auf null ab. Hohe Impulskomponenten werden also, wie gewünscht, durch die Vertexfunktion unterdrückt. In früheren Rechnungen wurde durch die cut-off Regularisierung eine scharfe Grenze zwischen hohen und niedrigen Impulsen definiert, was der physikalischen Intuition an sich widerspricht. Im Gegensatz dazu unterdrückt die Vertexkorrektur in einem kontinuierlichen Übergang die Impulskomponenten umso stärker je höher sie sind und "sieht" somit einen fließenden Übergang zwischen kurz- und langreichweitigen Effekten.

Eine andere Sichtweise auf die Eigenschaften des Vertex-Formfaktors liefert eine Variation in der Monopolmasse. Physikalisch sinnvoll ist ein Bereich von $m_{\pi} < \Lambda < \infty$ ($1 > r > 0$). An dessen Grenzen ergibt sich bei festem $q^2 \neq \Lambda^2$ (für $q^2 = m_{\pi}^2$ gilt stets $F_{\Lambda}(m_{\pi}^2) = 1$):

- $F_{\Lambda \rightarrow m_\pi}(q^2) \rightarrow 0$: Die gesamte Piondynamik wird von der Vertexfunktion weggeschnitten, d.h. eine Beschreibung von Kernmaterie über unseren Ansatz ist nicht mehr möglich.
- $F_{\Lambda \rightarrow \infty}(q^2) \rightarrow 1$: Dies entspricht dem früheren Grenzfall einer punktförmigen Wechselwirkung.

4.4 Beiträge zur Energie pro Teilchen

Wir wollen nun die konkreten Formeln der einzelnen Beiträge zur Energie pro Teilchen diskutieren, also die kinetische Energie und die Wechselwirkungen durch expliziten Pionenaustausch. Letztere umfassen in dieser Arbeit, wie bereits erwähnt, alle Diagramme mit bis zu drei Schleifen. Die benötigten Feynmanregeln wurden in Abschnitt 4.1 dargestellt. In die Wechselwirkung wird die π NN-Vertexfunktion, Gl. (4.9), eingearbeitet und die Abhängigkeit der einzelnen Beiträge von der Monopolmasse Λ ist von Interesse. Insbesondere stellt sich auch die Frage nach einem Vergleich der Massenskala Λ mit der charakteristischen Skala $\Lambda_\chi \simeq 4\pi f_\pi \simeq 1.16 \text{ GeV}$ der spontan gebrochenen chiralen Symmetrie. Desweiteren wird der Bezug zur Skalenunabhängigkeit der Energie und zur Renormierungsgruppe hergestellt.

Im Folgenden werden die einzelnen Beiträge zur Energie pro Teilchen in isospin-symmetrischer Kernmaterie systematisch als Funktion von Λ ausgewertet. Die Einzelbeiträge werden der Reihe nach mit einem Index nummeriert und in Abhängigkeit von $r = m_\pi/\Lambda$ und $u = k_f/m_\pi$ dargestellt.

Wir benutzen ferner eine Einteilung der geschlossenen Diagramme nach der Anzahl der Nukleonschleifen. Dabei bezeichnen wir Feynmangraphen mit einer einzigen Nukleonschleife als Fockdiagramme und solche mit zwei als Hartreedigramme.

Es sei nochmals angemerkt, dass in den Feynmandiagrammen der freie Anteil des Nukleonpropagators, Gl. (4.5), durch eine Linie mit Pfeil, die $\Delta(1232)$ -Anregung durch eine dicke Linie mit Pfeil und der Medieneinschub durch eine Linie mit einem doppelten Querstrich symbolisiert werden.

Schließlich sei noch angefügt, dass die Ordnung r^0 der dargestellten Ergebnisse jeweils mit den Resultaten der früheren Rechnungen ohne π NN-Vertexkorrektur (siehe [13, 15]) übereinstimmen muss. Alle Formeln wurden diesbezüglich überprüft.

4.4.1 Kinetische Energie

Im Fermigasmodell bewegen sich die Nukleonen wechselwirkungsfrei in einem vorgegebenen Volumen. Aufgrund des Pauliprinzips dürfen sich keine zwei Fermionen in Zuständen mit den gleichen Quantenzahlen befinden, weshalb bei der Temperatur $T = 0$ die Verteilungsfunktion der Nukleonen eine Stufenfunktion $\Theta(k_f - |\vec{p}|)$ ist. Damit beträgt in

isospin-symmetrischer Kernmaterie die kinetische Energie eines Nukleons im Mittel:

$$\begin{aligned}\bar{E}_0(k_f) &= \frac{4}{\rho(k_f)} \int_0^{k_f} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\sqrt{\vec{p}^2 + M_N^2} - M_N \right) \\ &\approx \frac{3k_f^2}{10M_N} - \frac{3k_f^4}{56M_N^3} + \frac{k_f^6}{48M_N^5}.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Der Faktor 4 in der ersten Zeile berücksichtigt die Spin- und Isospinfreiheitsgrade des Nukleons.

Die angegebene Korrektur proportional zu k_f^6 beläuft sich für $k_f = 262$ MeV nur auf etwa 3.0% des vorangehenden Terms in k_f^4 und ist damit praktisch vernachlässigbar. Da wir annehmen, dass die chirale Entwicklung konvergiert, nehmen wir ja auch die folgenden Wechselwirkungsbeiträge, wie bereits erwähnt, nur bis in Drei-Loop-Ordnung mit. Es tritt dadurch in den folgenden Ergebnissen höchstens die fünfte Potenz von kleinen Energie- bzw. Impulsskalen (m_π , k_f , Δ) auf, wobei diese als gleichwertig gezählt werden.

4.4.2 Ein-Pion-Austausch

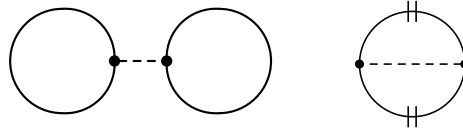


Abbildung 4.4: Hartree- und Fockdiagramm (mit zwei Medieneinschüben) des Ein-Pion-Austausches.

Das **Hartreedigramm** (Abb. 4.4 links) des Ein-Pion-Austausches, der einfachsten Wechselwirkung zweier Nukleonen, liefert keinen Beitrag, da das Austauschpion aufgrund der Impulserhaltung an jedem Vertex den Viererimpuls $q^\mu = 0$ tragen muss. Für spin- und isospinsymmetrische Kernmaterie mitteln sich überdies die Spin- und Isospin-Operatoren am π NN-Vertex zu null und die Pion-Nukleon-Wechselwirkung verschwindet somit. Ein nicht-verschwindender Beitrag resultiert dagegen aus dem **Fockdiagramm** (Abb. 4.4 rechts) mit dem Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$. Wie in Abschnitt 4.1 erklärt, muss nur das Diagramm mit *zwei Medieneinschüben* berechnet werden. Im Anhang C wird dies ausführlich durchgeführt. Es

ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_1(k_f, r) = & \frac{3g_A^2 m_\pi^3}{(4\pi f_\pi)^2} \left\{ \frac{1}{8u} \left(1 - \frac{3}{r^2} + \frac{2}{r^4} \right) + \arctan(2u) + \frac{1 - 3r^2}{2r^3} \arctan(2ur) \right. \\
& - \frac{1 + 12u^2}{32u^3} \ln(1 + 4u^2) - \frac{2 - 3r^2 + 12r^2(1 - 2r^2)u^2}{32r^6u^3} \ln(1 + 4u^2r^2) \\
& + \frac{m_\pi^2}{40M_N^2} \left[\frac{1}{2u} + 9u + \frac{3 - 4r^2 + 6r^2(4 - 7r^2)u^2}{2r^6u} \right. \\
& - (5 + 12u^2) \arctan(2u) + \frac{5(-3 + 5r^2) + 12r^2(-1 + 3r^2)u^2}{2r^5} \arctan(2ur) \\
& \left. \left. - \frac{1}{8u^3} \ln(1 + 4u^2) - \frac{3 - 4r^2}{8r^8u^3} \ln(1 + 4u^2r^2) \right] \right\}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Hierbei ist wieder m_π die Pionmasse, f_π die Pionzerfallskonstante, g_A die Axialvektor-Kopplungskonstante und M_N die Nukleonmasse. Ferner gelten stets die Definitionen $u := k_f/m_\pi$ und $r := m_\pi/\Lambda$.

Der Ein-Pion-Austausch gehorcht der einfachen “ $(2L - 1)$ -Regel” (vgl. Abschnitt 4.1) und liefert als Zwei-Loop-Diagramm einen Ausdruck in k_f^3 (bzw. in m_π^3 , was aufgrund von $m_\pi^3 = k_f^3/u^3$ äquivalent ist).

Für diesen Beitrag wurde die erste relativistische Korrektur proportional zu M_N^{-2} ebenfalls berechnet und es zeigt sich, dass diese bereits sehr klein ist. Für eine Monopolmasse von $\Lambda = 1 \text{ GeV}$ und $k_f = 262 \text{ MeV}$ beträgt sie nur etwa -4.8% des führenden Terms. Dies rechtfertigt die nichtrelativistische Behandlung der Nukleonen (den “Heavy-Baryon”-Limes) und die Beschränkung auf die führenden Terme der $1/M_N$ -Entwicklung im Folgenden.

4.4.3 Iterierter Ein-Pion-Austausch

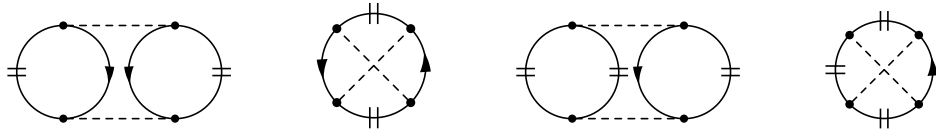


Abbildung 4.5: Hartree- und Fockdiagramme des iterierten Ein-Pion-Austausches mit zwei bzw. drei Medieneinschüben.

Wie in Abschnitt 4.1 angedeutet, besitzt der iterierte Ein-Pion-Austausch im Zähler des führenden nichtrelativistischen Terms den großen Skalenfaktor M_N und trägt - entgegen der einfachen “ $(2L - 1)$ -Abschätzung” für Drei-Loop-Graphen - bereits zur Ordnung k_f^4 bei. Betrachtet man zunächst die Diagramme mit *zwei* Medieneinschüben, so kann deren Verteilung nicht anders erfolgen als in den beiden linken Graphen in Abb. 4.5. Die Diagramme, bei denen die Medieneinschübe auf direkt benachbarten Propagatorstücken sitzen, zählen

zur Renormierung von Massen- und Kopplungskonstanten des Fockterms beim Ein-Pion-Austausch und sind durch die Verwendung der physikalischen (also der renormierten) Konstanten bereits berücksichtigt.

Für das **Hartreedidiagramm mit zwei Medieneinschüben** (Abb. 4.5 links) mit dem Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich:⁶

$$\begin{aligned} \bar{E}_2(k_f, r) = & \frac{3g_A^4 M_N m_\pi^4}{5(8\pi)^3 f_\pi^4} \left\{ \frac{(5 - 22r^2)(1 + r) + 41r^4 + 113r^5 + 8r^6}{16r^5(1 + r)u} \right. \\ & - \frac{15(1 + r) - 82r^2 + 390r^3 - 157r^4 + 75r^5}{8r^3(1 + r)} u \\ & + 4 \frac{5(3 + r^2) + 8(1 + r^2)u^2}{1 - r^2} \left(\arctan(2u) - \arctan(2ur) \right) \\ & - \frac{9 - r^2 + 20(7 + r^2)u^2}{8u^3(1 - r^2)} \ln(1 + 4u^2) \\ & + \frac{-5 + 27r^2 - 63r^4 + 105r^6 + 20r^2(1 - 7r^2 + 35r^4(1 + r^2)) u^2}{64r^7(1 - r^2)u^3} \\ & \left. \cdot \ln(1 + 4u^2r^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Bei einer Entwicklung dieser Formel in dem kleinen Parameter $r = m_\pi/\Lambda$ fällt auf, dass die Reihe mit einem Term in $1/r$ beginnt. Ohne die Regularisierung tritt hier ein linear divergentes Schleifenintegral auf. In [13] wurde letzteres durch den cut-off regularisiert, wodurch der in Abschnitt 4.2 erwähnte lineare Term in Λ entstand. Insgesamt war der Beitrag dann stark attraktiv. Dies gilt selbstverständlich auch für die von uns verwendete Regularisierung über die π NN-Vertexfunktion.

Das Hartreedidiagramm mit seinen hohen Spin-Isospin-Gewichtungsfaktoren dominiert über das entsprechende **Fockdiagramm mit zwei Medieneinschüben** (zweites von links in Abb. 4.5) mit dem Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$, obwohl bei diesem gleiche Verhältnisse bezüglich der Regularisierung herrschen. Auch hier ist ohne Regularisierung ein linear divergentes Schleifenintegral enthalten - allerdings nur im Verhältnis 1:4 zum Hartreedidiagramm aufgrund von Spin- und Isospinfaktoren. Deshalb ist dieser Beitrag deutlich schwächer attraktiv. Die

⁶Zur Auswertung des vierdimensionalen Schleifenintegrals verwendet man den Residuenkalkül, sofern die nullte Komponente nicht durch die Deltafunktion eines Medieneinschubs festgelegt ist. Für Integrationen über zwei Fermikugeln sind ferner die Formeln im Anhang B sehr nützlich.

Rechnung ergibt folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_3(k_f, r) = & \frac{3g_A^4 M_N m_\pi^4}{(4\pi)^3 f_\pi^4 u^3} \int_0^u dx x (u-x)^2 (2u+x) \left\{ \frac{1+8x^2+8x^4}{2(1+2x^2)} \arctan x \right. \\
& - \frac{(1-r^2)^2(1+4x^2)}{2(1+2x^2)(1+r^2(1+4x^2))^2} \arctan(2x) \\
& + x(1-r^2) \left[\frac{1}{1+r^2(1+4x^2)} + \frac{1+r^2(1+4x^2)}{(1+r^2(1+4x^2))^2 - 4r^2} \right] \\
& + \left[\frac{(1-r^2)^2}{4r^2(1+2r^2x^2)^3} + \frac{1+2r^4x^2}{2(1+2r^2x^2)^2} \right] [\arctan(2rx) - \arctan(rx)] \\
& + (1+2x^2) \arctan(rx) - \frac{1+r^4(1+4x^2)}{(1+r^2(1+4x^2))^2} \arctan(2rx) \\
& + \left[1+2x^2 - \frac{1+r^4(1+4x^2)}{(1+r^2(1+4x^2))^2} \right] \\
& \cdot \left[\arctan \frac{4r^2x}{1-r^2(1-4x^2)} - \arctan \frac{2rx}{1+r} - \arctan \frac{2rx}{1-r} \right] \\
& + \frac{x}{r}(1-r^2) \left[\frac{4r^2x^2(r^2-2)+5r^2-9}{16(1+r^2x^2)^2} - \frac{1+r^2x^2(1+r^2)}{(1+2r^2x^2)^2} \right. \\
& \left. + \frac{1}{1+r^2(1+4x^2)} - \frac{2r^2}{(1+r^2(1+4x^2))^2 - 4r^2} \right] \Big\} .^7 \tag{4.14}
\end{aligned}$$

In Bezug auf Divergenzen liegt der iterierte Ein-Pion-Austausch mit *drei* Medieneinschüben ganz anders. Ein Aufschneiden der beiden rechten Diagramme in Abb. 4.5 an den Medieneinschüben zeigt, dass sie als Wechselwirkung von drei Nukleonen interpretiert werden können. Da jeder der drei Medieneinschübe eine Stufenfunktion $\Theta(k_f - |\vec{p}|)$ beinhaltet (siehe Gl. (4.5)), reduzieren sich jetzt alle drei Schleifenintegrationen auf Integrationen über Fermikugeln und es gibt auch ohne Regularisierung kein divergentes Integral.

Das **Hartreedigramm mit drei Medieneinschüben** (zweites von rechts in Abb. 4.5) mit dem Symmetriefaktor 1 liefert folgenden repulsiven Beitrag:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_4(k_f, r) = & \frac{9g_A^4 M_N m_\pi^4}{(4\pi f_\pi)^4 u^3} \int_0^u dx x^2 \int_{-1}^1 dy \left[2uxy + (u^2 - x^2y^2) \ln \frac{u+xy}{u-xy} \right] \\
& \cdot \left\{ 2 \frac{1+r^2}{1-r^2} \left[\ln(1+r^2s^2) - \ln(1+s^2) \right] + \frac{s^2}{3(1+s^2)(1+r^2s^2)^3} \left[6(1+r^2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3(1+r^2)(1+5r^2)s^2 + r^2(3+25r^2+7r^4+r^6)s^4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + r^4(1+10r^2+r^4)s^6 \right] \right\}, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

wobei die Definition $s := xy + \sqrt{u^2 - x^2 + x^2y^2}$ eingesetzt wird.

⁷Die letzten Terme, die keinen arctan enthalten, können noch weiter integriert werden. Da das Ergebnis dadurch aber stark in die Länge wächst, wurde an dieser Stelle darauf verzichtet.

Für das entsprechende, attraktive **Fockdiagramm mit drei Medieneinschüben** (Abb. 4.5 rechts) mit dem Symmetriefaktor 1 erhält man: ⁸

$$\begin{aligned} \bar{E}_5(k_f, r) = & \frac{9g_A^4 M_N m_\pi^4}{(4\pi f_\pi)^4 u^3} \\ & \int_0^u dx \left\{ \frac{G_r^2}{8} - \frac{x^2}{4} \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 dz \frac{yz\Theta(y^2 + z^2 - 1)}{|yz|\sqrt{y^2 + z^2 - 1}} \left[\frac{(1-r^2)s^2}{1+r^2s^2} - \ln(1+s^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + \ln(1+r^2s^2) \right] \cdot \left[\frac{(1-r^2)t^2}{1+r^2t^2} - \ln(1+t^2) + \ln(1+r^2t^2) \right] \right\}, \quad (4.16) \end{aligned}$$

wobei ⁹

$$\begin{aligned} G_r(x, u) := & u \frac{1-r^2}{r^2} + \frac{1}{4x} [1 + (u+x)^2][1 + (u-x)^2] \left(\ln \frac{1+r^2(u+x)^2}{1+r^2(u-x)^2} \right. \\ & \left. - \ln \frac{1+(u+x)^2}{1+(u-x)^2} \right) - \frac{(1-r^2)^2}{4r^4x} \ln \frac{1+r^2(u+x)^2}{1+r^2(u-x)^2}. \quad (4.17) \end{aligned}$$

Aufgrund von Spin- und Isospinfaktoren ergibt das Fockdiagramm betragsmäßig auch hier wieder kleinere Werte als das Hartreeddiagramm.

Diagramme mit vier Medieneinschüben ergeben rein imaginäre Beiträge und heben sich gegen die Imaginärteile der Diagramme mit zwei und drei Medieneinschüben weg. Über die Unitarität sind die Imaginärteile mit der Streuung von Nukleonen auf der Massenschale verbunden, wofür aber aufgrund von Energieerhaltung und Pauliprinzip im Medium kein Phasenraum existiert. Dadurch ist sichergestellt, dass die Energie pro Teilchen reell ist.

4.4.4 Irreduzibler Zwei-Pion-Austausch mit bis zu zwei virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregungen

Hier tauchen zum ersten Mal Diagramme mit expliziten Δ -Anregungen im Zählschema auf. Wir klassifizieren im Folgenden die Vielfalt der zum irreduziblen Zwei-Pion-Austausch gehörigen Drei-Loop-Diagramme, vgl. Abb. 4.6-4.8, nach der Anzahl der Δ -Propagatoren.

Betrachten wir zunächst die Diagramme **ohne explizite Δ -Anregungen**.

Die *Hartreeddiagramme* tragen in isospin-symmetrischer Kernmaterie nicht zur Energie pro

⁸Um die $dydz$ -Integrations im Ergebnis numerisch auszuwerten, ist es zunächst sinnvoll den Integranden so umzuschreiben, dass der Integrationsbereich für beide Variablen von 0 bis 1 reicht. Anschließend hilft die Transformation $z \rightarrow \sqrt{1+y^2(\zeta^2-1)}$ zur Elimination der Stufenfunktion $\Theta(y^2+z^2-1)$ weiter.

⁹Es wurde stets auf eine möglichst analoge Darstellung zu dem entsprechenden Ergebnis ohne Vertexfunktion (vgl. [13]) Wert gelegt. In diesem Fall gilt: $\lim_{r \rightarrow 0} G_r(x, u) = G_{\text{ohne Vertexfunktion}}(x, u)$.

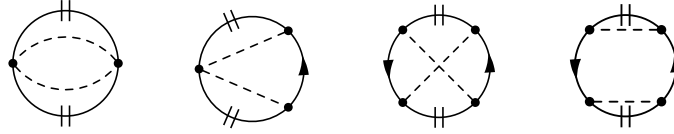


Abbildung 4.6: Fock-Zweikörperterme des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches ohne Δ (Symmetriefaktoren: $\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$) - die entsprechenden Hartreedigramme verschwinden.

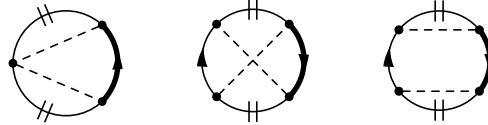


Abbildung 4.7: Fock-Zweikörperterme des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches mit einem Δ .

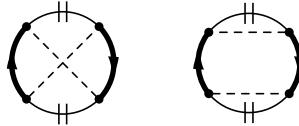


Abbildung 4.8: Fock-Zweikörperterme des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches mit zwei Δ .

Teilchen bei: Die zu den beiden rechten Fockdiagrammen in Abb. 4.6 gehörenden Hartreedigramme heben sich gegeneinander auf und die den links in Abb. 4.6 dargestellten Fockdiagrammen entsprechenden Hartreedigramme verschwinden mit ihren Isospin- oder Spinspuren. Man kann dies auch daran sehen, dass nach dem Bilden der Spin- und Isospinspur über die T-Matrix der Nukleon-Nukleon (NN)-Streuung nur die isoskalare, zentrale NN-Amplitude $V_C(0)$ übrig bleibt. Diese Amplitude beinhaltet in führender Ordnung keinen Beitrag vom irreduziblen Zwei-Pion-Austausch ohne explizite Δ -Anregungen (vgl. [35]).

Untersucht man die *Fockdiagramme* in Abb. 4.6, so fällt auf, dass das zweite Diagramm von rechts bereits beim iterierten Ein-Pion-Austausch auftaucht. Dessen Anteile müssen sorgfältig von denen des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches getrennt werden. Beschränkt man sich auf die führenden Terme einer $1/M_N$ Entwicklung, so fällt dem iterierten Ein-Pion-Austausch der im strengen “Heavy-Baryon”-Limes ($M_N \rightarrow \infty$) divergente Term proportional zu M_N zu und dem irreduziblen Zwei-Pion-Austausch der nächste Term proportional zu M_N^0 (siehe [35]).

Es sei noch angemerkt, dass die Diagramme ohne Δ -Anregung mit drei bzw. vier Medieneinschüben (Wechselwirkung von drei bzw. vier Nukleonen) bereits zu den relativistischen Korrekturen zählen, d.h. in führender Ordnung proportional zu $1/M_N$ sind.¹⁰ Im betrachteten nichtrelativistischen Limes sollten diese Diagramme vernachlässigbar sein und

¹⁰Das zweite Diagramm von rechts in Abb. 4.6 beinhaltet bei drei Medieneinschüben auch einen Beitrag proportional zu M_N . Dieser ist aber wiederum dem iterierten Ein-Pion-Austausch zuzuordnen und wurde dort auch einbezogen.

werden hier nicht betrachtet. Sie würden außerdem Beiträge in k_f^6 liefern. Für diese Ordnung müssten dann notwendigerweise auch Vier-Loop-Diagramme berechnet werden. Die Anzahl der zu berücksichtigenden Feynmangraphen würde dadurch extrem anwachsen, und auf die Komplexität ihrer Berechnung wurde bereits hingewiesen.

Bei den Diagrammen **mit einer virtuellen Δ -Anregung** tragen die in Abb. 4.7 gezeigten Fockdiagramme bei. Das dem linken Graphen entsprechende Hartreedidiagramm verschwindet mit seiner Spinspur, die zu den beiden anderen Fockgraphen gehörigen Hartreedidiagramme (hier nicht extra dargestellt) heben sich nun jedoch nicht auf, sondern liefern zwei gleich große, nicht-verschwindende Beiträge.

Neben den Diagrammen mit zwei Medieneinschüben in Abb. 4.7 tragen auch die hier nicht dargestellten Graphen mit drei Medieneinschüben zur gleichen Ordnung bei. Wir berechnen den irreduziblen Zwei-Pion-Austausch jedoch nicht wie bisher mittels expliziter Auswertung der geschlossenen Diagramme durch die Feynmanregeln, sondern ziehen die Dispersionsrelation für die Nukleon-Nukleon Streumatrix T heran. Die Dreikörperterme werden damit nicht erfasst und müssen gesondert berechnet werden, was im nächsten Abschnitt nachgeholt wird.

In Abb. 4.8 sind schließlich die nicht-verschwindenden Fockgraphen **mit zwei virtuellen Δ -Anregungen** gezeigt. Die zugehörigen Hartreedidiagramme (nicht dargestellt) liefern, wie im Fall von einer Δ -Anregung, zwei gleich große Beiträge. Da hier nur zwei Medieneinschübe möglich sind, können alle Beiträge mit zwei virtuellen Δ -Anregungen in der Nukleon-Nukleon T -Matrix erfasst werden. Die Details der Berechnung mit Hilfe der Dispersionsrelation, die wir in zweifach subtrahierter Form verwenden, verdient eine separate Betrachtung. Wir verweisen deshalb auf Abschnitt 4.6 und geben hier nur das Ergebnis an:

$$\begin{aligned} \bar{E}_6(k_f, \Lambda) = & \frac{1}{8\pi^3} \int_{2m_\pi}^{\Lambda+m_\pi} d\mu \operatorname{Im}(V_C + 3W_C + 2\mu^2 V_T + 6\mu^2 W_T) \left\{ 3\mu k_f - \frac{4k_f^3}{3\mu} \right. \\ & \left. + \frac{8k_f^5}{5\mu^3} - \frac{\mu^3}{2k_f} - 4\mu^2 \arctan \frac{2k_f}{\mu} + \frac{\mu^3}{8k_f^3} (12k_f^2 + \mu^2) \ln \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Diese Formel umfasst alle in Abb. 4.6-4.8 dargestellten Vakuumgraphen. Sie beschreibt, wenn auch in dieser Darstellung nicht ganz offensichtlich, einen Beitrag in k_f^5 , was der “ $(2L - 1)$ -Regel” (vgl. Abschnitt 4.1) gehorcht.

4.4.5 Dreikörperterme des Zwei-Pion-Austausches mit einer virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregung

An dieser Stelle wird, wie im letzten Abschnitt angekündigt, die Berechnung der Diagramme mit einer Δ -Anregung und drei Medieneinschüben nachgeholt. Die Zwischenzustände der Wechselwirkung zweier Nukleonen sind nun durch einen weiteren Medieneinschub Pauli-geblockt. Dies ist gleichbedeutend mit der Wechselwirkung dreier Nukleonen. Durch

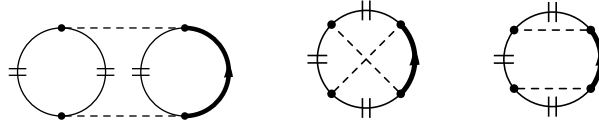


Abbildung 4.9: Dreikörperterme des Zwei-Pion-Austausches mit einem expliziten Δ , Symmetriefaktor stets gleich 1.

die T-Matrix der Streuung von zwei Nukleonen (im Vakuum) konnten sie offensichtlich nicht erfasst werden und ihre Berechnung erfolgt wieder explizit über die Feynmanregeln. Im Gegensatz zu den Drei- bzw. Vierkörperdiagrammen ohne Δ , die erst zu den relativistischen Korrekturen beitragen, zählen sie bereits zu der führenden nichtrelativistischen Ordnung aufgrund der kleinen Skala Δ , die statt der Nukleonmasse M_N im Nenner des Propagators auftritt. Zusammen mit dem Faktor k_f^6 im Zähler tragen sie dann insgesamt in fünfter Potenz einer kleinen Skala, nämlich mit k_f^6/Δ , bei.

Das beitragende, repulsive **Hartreedigramm** (Abb. 4.9 links) lässt sich vollständig integrieren und ergibt:

$$\begin{aligned} \bar{E}_7(k_f, r) = & \frac{g_A^4 m_\pi^6}{\Delta (2\pi f_\pi)^4} \left\{ \frac{4r^2 u^2 + (-1 + 2r^2 + 15r^4)u^4}{4r^2(1 + 4r^2 u^2)} \right. \\ & + \frac{1 + 3(3 + r^2)u^2}{4(1 - r^2)} [\ln(1 + 4u^2 r^2) - \ln(1 + 4u^2)] \\ & \left. + \frac{1 - 15r^2 - 45r^4 - 5r^6}{8r^3(1 - r^2)} u^3 \arctan(2ur) + \frac{5 + 3r^2}{1 - r^2} u^3 \arctan(2u) \right\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Das **gekreuzte Fockdiagramm** (Abb. 4.9 Mitte) liefert den attraktiven Term:

$$\bar{E}_8(k_f, r) = -\frac{3g_A^4 m_\pi^6}{4\Delta (4\pi f_\pi)^4 u^3} \int_0^u dx [2G_{S,r}^2(x, u) + G_{T,r}^2(x, u)]. \quad (4.20)$$

Dabei werden folgende Definitionen verwendet: ¹¹

$$\begin{aligned}
G_{S,r}(x, u) &= 4x \left(\arctan(u+x) + \arctan(u-x) \right) + (x^2 - u^2 - 1) \ln \frac{1 + (u+x)^2}{1 + (u-x)^2} \\
&\quad + 2x \frac{1 - 3r^2}{r^3} \left(\arctan[r(u+x)] + \arctan[r(u-x)] \right) \\
&\quad + \frac{-1 + 2r^2 + r^4(u^2 - x^2)}{r^4} \ln \frac{1 + r^2(u+x)^2}{1 + r^2(u-x)^2}, \tag{4.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{T,r}(x, u) &= \frac{1}{8x^2} [1 + (u+x)^2] [1 + (u-x)^2] [1 + u^2 - x^2] \ln \frac{1 + (u+x)^2}{1 + (u-x)^2} \\
&\quad + \frac{(1 - r^2)u}{2r^4} \frac{1}{x} [r^2(1 - u^2 + x^2) - 2] \\
&\quad + \frac{1}{8r^6 x^2} [2 + r^2(-3 + 3u^2 + x^2) - 2r^4(3u^2 + x^2) + r^6(-u^6 + x^4 + x^6 \\
&\quad + 3u^4(-1 + x^2) + u^2 x^2(2 - 3x^2))] \ln \frac{1 + r^2(u+x)^2}{1 + r^2(u-x)^2}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

In isospin-symmetrischer Kernmaterie trägt das **ungekreuzte Fockdiagramm** (Abb. 4.9 rechts) aufgrund seiner verschwindenden Isospinspur nicht bei.

4.5 Auswertung

Nun wollen wir die im vorigen Abschnitt gezeigten Formeln veranschaulichen. Dazu muss man sich in der numerischen Auswertung auf ausgewählte Werte des Parameters Λ beschränken. Um die Piondynamik zu erfassen, aber auch um zu hohe Impulse außerhalb der Gültigkeit der chiralen Störungstheorie auszuschließen, ist der Bereich $700 \text{ MeV} < \Lambda < 2 \text{ GeV}$ sicherlich bereits ausreichend (vgl. Abschnitt 4.3). In dieser Arbeit wurde dennoch das zum Zweck systematischer Studien größere Intervall $450 \text{ MeV} \leq \Lambda \leq 2.7 \text{ GeV}$ gewählt. Dies ist äquivalent zu einem Bereich $0.3 \geq r \geq 0.05$ für den Parameter r , in welchem die Rechnungen durchgeführt wurden. Abgetastet wurden dabei insgesamt 51 verschiedene Werte im Abstand von $\Delta r = 0.005$.

Ebenso wird die Nukleonendichte ρ zur numerischen Auswertung diskretisiert - mit 100 Werten zwischen $0.005 \text{ fm}^{-3} \leq \rho \leq 0.5 \text{ fm}^{-3}$, also im Abstand von $\Delta \rho = 0.005 \text{ fm}^{-3}$.

Einen Überblick über den Einfluss der π NN-Vertexfunktion gewinnt man in den Abb. 4.10-4.15, wo die Energie pro Teilchen der Einzelbeiträge für verschiedene Werte von Λ (bzw. äquivalent von r) gegen die Dichte aufgetragen ist.

¹¹Auch hier wurde wieder auf eine zum Ergebnis ohne π NN-Vertexkorrektur (siehe [15]) ähnliche Darstellung geachtet und es gilt: $\lim_{r \rightarrow 0} G_{I,r}(x, u) = G_{I, \text{ohne Vertexfunktion}}(x, u)$ mit $I \in \{S, T\}$.

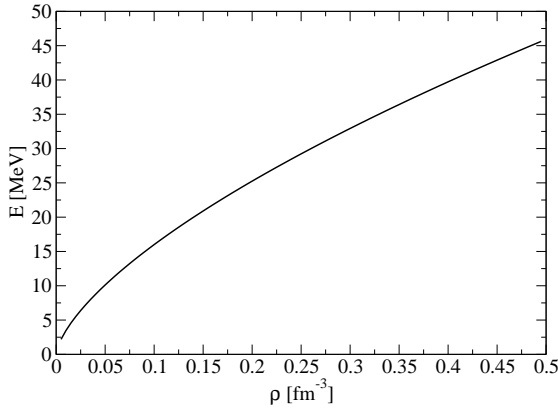


Abbildung 4.10: Kinetische Energie als Funktion der Nukleonendichte.

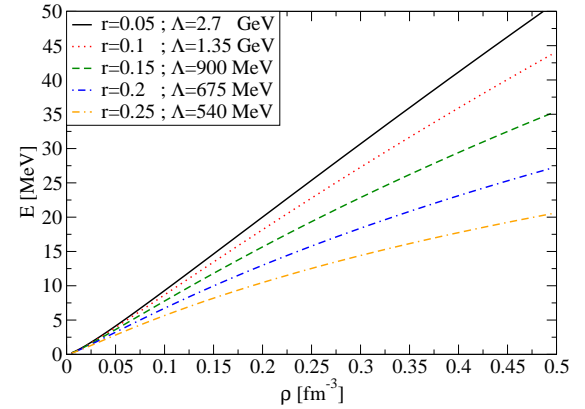


Abbildung 4.11: Energie pro Teilchen des Ein-Pion-Austausch, aufgetragen gegen die Dichte für mehrere Werte von Λ .

Die Probleme der früheren Berechnungen (vgl. Abschnitt 4.2) sind durch die Einführung der π NN-Vertexfunktion weitgehend behoben. Aus allen Beiträgen werden nun die gleichen, hohen Impulskomponenten ausgefiltert. Je niedriger die Monopolmasse (die ja im Wesentlichen die Funktion eines “kontinuierlichen” cut-offs übernimmt), desto kleiner der zugängliche Phasenraum für die Wechselwirkung der Nukleonen und damit die Beträge der Einzelbeiträge. Exemplarisch ergeben sich für den Ein-Pion-Austausch folgende Werte für die Energie pro Teilchen bei $k_f = 262$ MeV:

Λ	$\bar{E}_1(k_f = 262 \text{ MeV}, \Lambda)$
2.7 GeV	15.5 MeV
1.35 GeV	14.2 MeV
900 MeV	12.4 MeV
675 MeV	10.5 MeV
540 MeV	8.6 MeV .

Wie entscheidend die Größe von Λ ist, wird auch in den Diagrammen 4.10-4.15 deutlich. Der Fockbeitrag mit zwei Medieneinschüben in Abb. 4.12 ändert bei höheren Dichten für $\Lambda < 900$ MeV sogar sein Vorzeichen. Es sei noch angemerkt, dass man in den Diagrammen zum iterierten Ein-Pion-Austausch mit zwei Medieneinschüben (Abb. 4.12) deutlich den Einfluss der linearen Divergenz bemerkt, die im Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$ (unregularisiert) alle anderen Beiträge dominiert. Beim irreduziblen Zwei-Pion-Austausch tritt ein eigentlich quadratisch divergenter Beitrag jedoch nicht zu Tage, da hier die zweifache Subtraktion in der Dispersionsrelation allein schon für Konvergenz sorgt (vgl. Abschnitt 4.6).

Abb. 4.16 zeigt schließlich die Abhängigkeit der gesamten Energie pro Teilchen $\bar{E}(k_f, \Lambda)$ von der Monopolmasse. Die Λ -Abhängigkeiten der Einzelbeiträge summieren sich zu einer

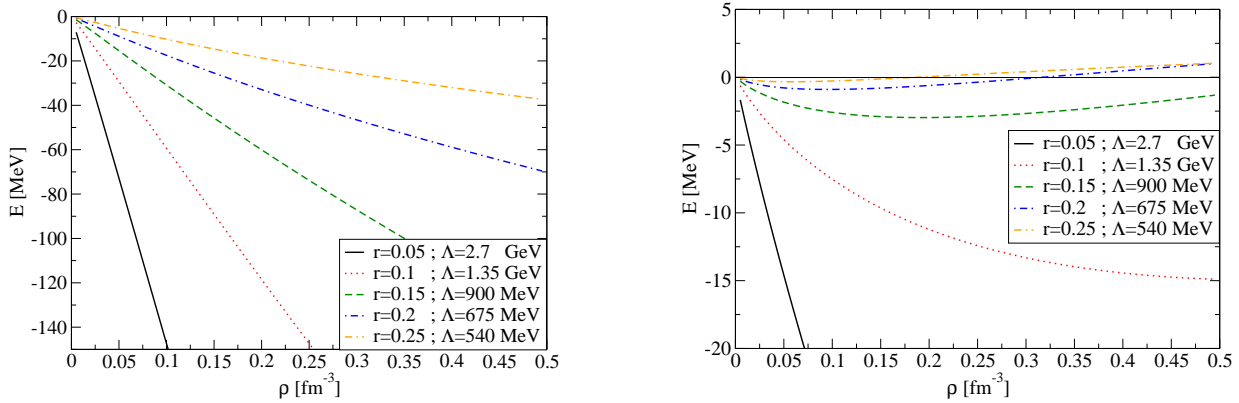


Abbildung 4.12: Energie pro Teilchen des Hartree- (links) und des Fockbeitrags (rechts) des iterierten Ein-Pion-Austausches mit zwei Medieneinschüben in Abhängigkeit von der Dichte für mehrere Werte von Λ .

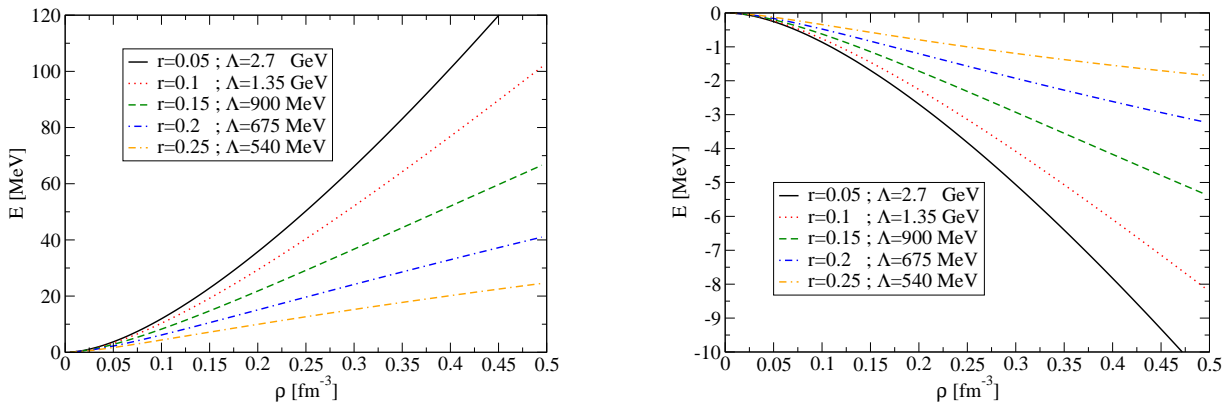


Abbildung 4.13: Hartree- (links) und Fockbeitrag (rechts) des iterierten Ein-Pion-Austausches mit drei Medieneinschüben: Für mehrere Werte von Λ ist die Energie pro Teilchen gegen die Dichte dargestellt.

starken Abhängigkeit der Gesamtenergie auf, wie folgende Tabelle verdeutlicht:

Λ	$\bar{E}_{ges}(k_f = 262 \text{ MeV}, \Lambda)$
2.7 GeV	-200.9 MeV
1.35 GeV	-38.2 MeV
900 MeV	5.9 MeV
675 MeV	21.3 MeV
540 MeV	26.6 MeV

Es stellt sich dabei heraus, dass etwa für $\Lambda > 900$ MeV Sättigung möglich ist.

Um die empirischen Werte für Kernmaterie (vgl. Abschnitt 2.1) möglichst gut zu reproduzieren, legen wir den *einzigsten* freien Parameter Λ (bzw. äquivalent r) so fest, dass die

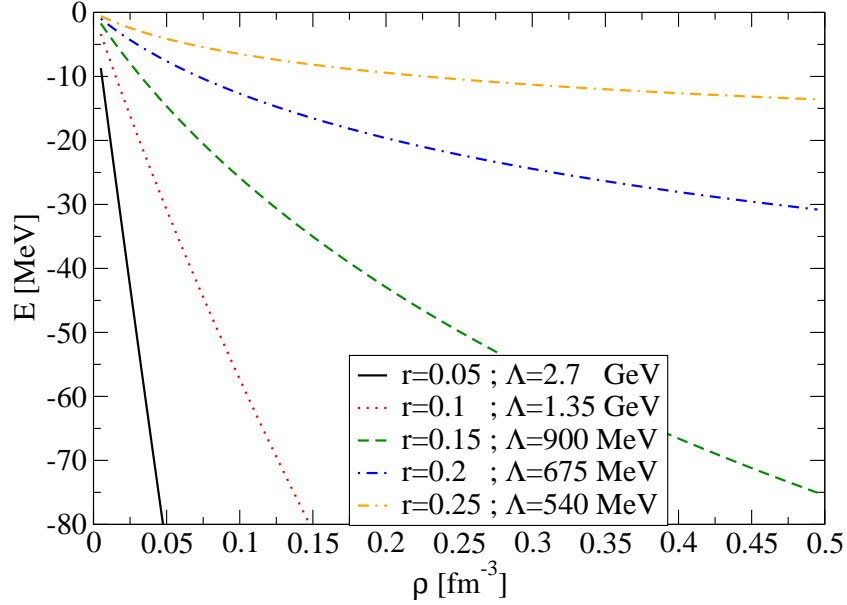


Abbildung 4.14: Gesamtbeitrag des iterierten Ein-Pion-Austausches zur Energie pro Teilchen in Abhängigkeit von der Dichte für verschiedene Werte von Λ .

Energie pro Teilchen bei dem Fermiimpuls $k_{f,0} = 262 \text{ MeV}$, was einer Sättigungsdichte von $\rho_0 \approx 0.158 \text{ fm}^{-3}$ entspricht, ein Minimum besitzt.¹²

$$\left. \frac{d\bar{E}_{ges}(k_f, \Lambda_0)}{dk} \right|_{k_f \rightarrow 262 \text{ MeV}} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.23)$$

Diese Forderung legt den freien Parameter *eindeutig* fest zu

$$\Lambda_0 \approx 1.15 \text{ GeV} \quad \Leftrightarrow \quad r_0 \approx 0.118. \quad (4.24)$$

Auffällig ist, wie nahe dieser Wert der Monopolmasse bei $\Lambda_\chi \simeq 4\pi f_\pi \approx 1.16 \text{ GeV}$, dem Wert der charakteristischen Skala der chiralen Störungstheorie, liegt.

Die Energie pro Teilchen beläuft sich für Λ_0 bei der Sättigungsdichte auf

$$\bar{E}_{ges}(k_{f,0}, \Lambda_0) \approx -16.8 \text{ MeV}, \quad (4.25)$$

was sehr gut mit dem empirischen Wert von $(-16 \pm 1) \text{ MeV}$ (vgl. Abschnitt 2.1) übereinstimmt. Der Wert setzt sich dabei wie folgt aus den Einzelbeiträgen zusammen:

$$\bar{E}_{ges}(k_{f,0}, \Lambda_0) \approx (21.64 + 13.63 - 72.86 - 6.41 + 19.06 - 1.46 + 4.63 + 7.72 - 2.67) \text{ MeV}.$$

kin.
1π
H2
F2
H3
F3
irr.2π
3N-H
3N-F

¹²In den früheren Rechnungen, siehe [13], wurde im Gegensatz dazu der Parameter auf die Tiefe des Minimums fixiert und dann die zugehörige Sättigungsdichte mit dem erhaltenen Wert von Λ ermittelt.

¹³Die Bedingung (4.23) legt zunächst nur einen Extrempunkt fest. Dass es sich um ein Minimum handelt, wird durch einen positiven Wert der Kompressibilität bestätigt.

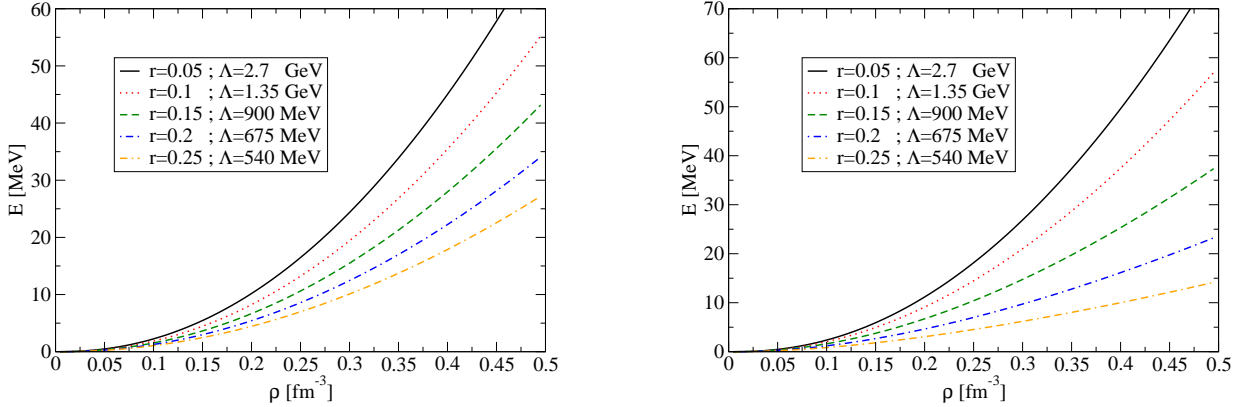


Abbildung 4.15: Beitrag des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches mit zwei Medieneinschüben (links) und der Dreikörperterme des Zwei-Pion-Austausches (rechts) zur Energie pro Teilchen aufgetragen gegen die Dichte für mehrere Werte von Λ .

Der attraktive Anteil wird hauptsächlich vom Hartreedigramm des iterierten Ein-Pion-Austausches mit zwei Medieneinschüben beigetragen.

Der Wert der Kompressibilität von

$$\kappa(k_{f,0}, \Lambda_0) \approx 292 \text{ MeV} \quad (4.26)$$

ist durchaus akzeptabel, da der empirische Wert von $\kappa = (220 \pm 50) \text{ MeV}$ (siehe Abschnitt 2.1) selbst mit großen Unsicherheiten behaftet ist und kontroverse Diskussionen darüber andauern. Durch den positiven Wert ist ein Minimum der Sättigungskurve sichergestellt und in Abb. 4.17 ist diese zu sehen. Dass der Sättigungspunkt durch die bisherigen Rechnungen so gut reproduziert werden kann, ist insofern erstaunlich, als keine zusätzlichen Kontaktterme eingefügt wurden. Dieser Gesichtspunkt wird in Abschnitt 4.6 näher untersucht.

Zunächst wollen wir die Gesamtenergie pro Teilchen am Sättigungspunkt noch in ihre chiralen Ordnungen zerlegen: Der kinetische Term beinhaltet die Ordnungen k_f^2 , k_f^4 (und vernachlässigbar k_f^6). Der Ein-Pion-Austausch ist ein Beitrag in k_f^3 , der iterierte Ein-Pion-Austausch zeigt die Ordnung k_f^4 und der Zwei-Pion-Austausch liefert einen Beitrag in der fünften Potenz einer kleinen Skala (der irreduzible Teil in k_f^5 , die Dreikörperterme in k_f^6/Δ). Damit:

$$\bar{E}_{ges}(k_{f,0}, \Lambda_0) \approx (21.93 + 13.63 - 61.97 + 9.69) \text{ MeV} .$$

$$k_f^2 \quad k_f^3 \quad k_f^4 \quad k_f^5$$

Der Betrag der fünften Ordnung beläuft sich nur noch auf etwa 15.6% der vierten Ordnung, was auf eine Konvergenz der chiralen Entwicklung hindeutet.¹⁴ Die geringe Rolle der fünf-

¹⁴Beachte, dass die chirale Entwicklung mindestens ein Polynom vierter Ordnung in k_f sein muss, um einen vernünftigen Verlauf der Sättigungskurve mit Minimum zu reproduzieren.

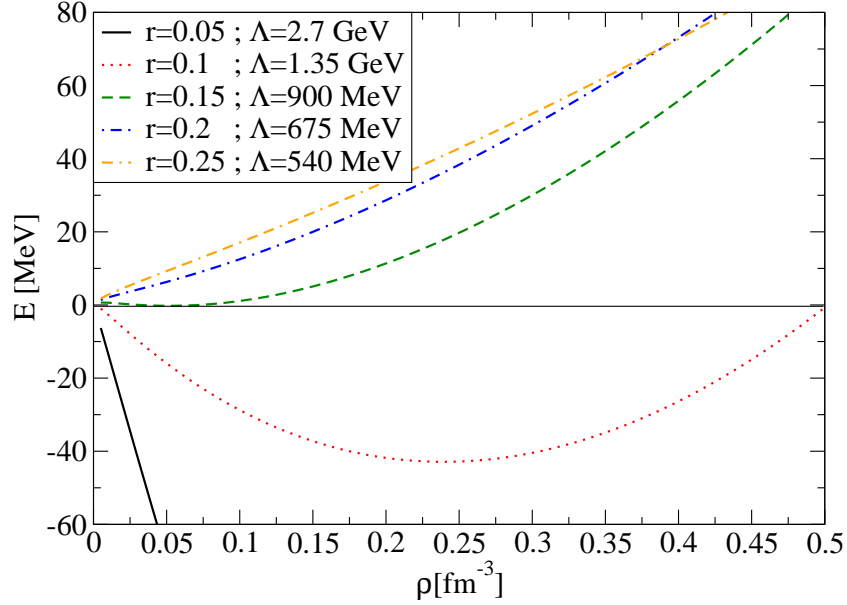


Abbildung 4.16: Gesamtenergie pro Teilchen.

ten Ordnung, also des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches, demonstriert ferner, dass der iterierte Ein-Pion-Austausch (wie bereits in den Rechnungen ohne π NN-Vertexfunktion, siehe [13, 15]) für den Sättigungsmechanismus entscheidend ist. Dies lässt sich weiter verdeutlichen, indem man die Auswertung wiederholt, aber ohne den gesamten Zwei-Pion-Austausch (d.h. ohne alle Zwei- und Dreikörperterme aus Gl. (4.18)-Gl. (4.20)). Es ergibt sich:

$$\Lambda_{ohne\ ges.2\pi} \approx 906\text{ MeV} (\Leftrightarrow r_{ohne\ ges.2\pi} \approx 0.149) \rightarrow \begin{cases} \bar{E}(k_{f,0}, \Lambda_{ohne\ ges.2\pi}) \approx -2.89\text{ MeV} \\ \kappa(k_{f,0}, \Lambda_{ohne\ ges.2\pi}) \approx 51.7\text{ MeV} . \end{cases}$$

Die Monopolmasse ist, wie erwartet, sehr stark reduziert: Wenn der Zwei-Pion-Austausch wegfallen soll, muss der Übergang von niedrigen zu hohen Impulsen bereits bei deutlich kleineren Werten gesetzt werden. Die attraktiven Anteile sind jetzt zu schwach, um die Tiefe des empirischen Sättigungspunktes zu reproduzieren. Dies erstaunt auf den ersten Blick, da sich in Abb. 4.15 deutlich zeigt, dass der Zwei-Pion-Austausch für jedes betrachtete Λ repulsiven Charakter hat. Dieser repulsive Anteil ist nun ausgenommen und man könnte eher zuviel Attraktion erwarten. Allerdings ist zu bedenken, dass die anderen Einzelbeiträge ebenfalls stark von Λ abhängen. Gerade der iterierte Ein-Pion-Austausch, insbesondere der Hartreebeitrag mit zwei Medieneinschüben, liefert für ein kleineres Λ weniger Attraktion. Dies dominiert den Wegfall des repulsiven Zwei-Pion-Anteils sogar. Die aufgeschlüsselte Zusammensetzung von $\bar{E}(k_{f,0}, \Lambda_{ohne\ ges.2\pi})$ gibt quantitative Auskunft:

$$\bar{E}_{ohne\ ges.2\pi}(k_{f,0}, \Lambda_{ohne\ ges.2\pi}) \approx (21.64 + 12.48 - 48.69 - 3.01 + 15.96 - 1.24)\text{ MeV} .$$

kin. 1π H2 F2 H3 F3

Obwohl der empirische Sättigungspunkt quantitativ nicht mehr getroffen wird, funktioniert der Sättigungsmechanismus vor allem durch den iterierten Ein-Pion-Austausch aber immer

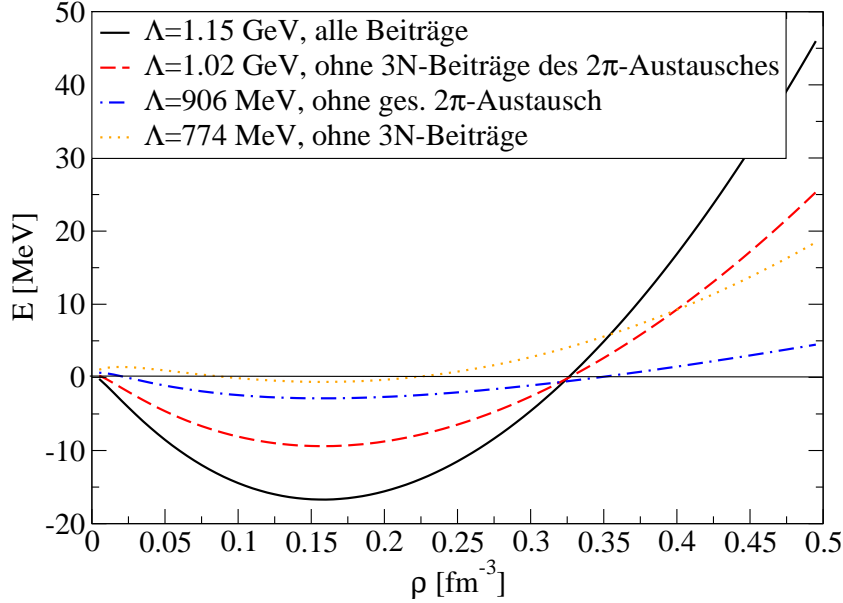


Abbildung 4.17: Sättigungskurven für verschiedene Ausgangspunkte (bezüglich der Einzelbeiträge, die in der Auswertung mitgenommen wurden).

noch, und es zeigt sich doch zumindest qualitativ eine Sättigungskurve (vgl. Abb. 4.17).

Schließlich wollen wir noch einen kurzen Vergleich mit den $V_{low k}$ -Ergebnissen anstellen, wo Sättigung nur unter Einbeziehung von Dreikörperkräften möglich ist (vgl. Kap. 3). Lassen wir dazu zunächst die Dreikörperkräfte des Zwei-Pion-Austausches (Gl. (4.19) und (4.20)) in unserer ansonsten identischen Auswertung weg, so ergeben sich die Werte:

$$\Lambda_{ohne\ 3N-2\pi} \approx 1.02\ \text{GeV} \ (\Leftrightarrow r_{ohne\ 3N-2\pi} \approx 0.132) \rightarrow \begin{cases} \bar{E}(k_{f,0}, \Lambda_{ohne\ 3N-2\pi}) \approx -9.45\ \text{MeV} \\ \kappa(k_{f,0}, \Lambda_{ohne\ 3N-2\pi}) \approx 167\ \text{MeV}, \end{cases}$$

wobei sich der Wert der Gesamtenergie pro Teilchen am Sättigungspunkt aus folgenden Einzelbeiträgen zusammensetzt:

$$\bar{E}_{ohne\ 3N-2\pi}(k_{f,0}, \Lambda_{ohne\ 3N-2\pi}) \approx \begin{matrix} (21.64 + 13.12 - 60.27 - 4.54 + 17.64 - 1.36 + 4.37)\ \text{MeV} . \\ \text{kin.} \quad 1\pi \quad \text{H2} \quad \text{F2} \quad \text{H3} \quad \text{F3} \quad \text{irr.}2\pi \end{matrix}$$

Demnach kann die Sättigung auch ohne die Dreikörperterme des Zwei-Pion-Austausches immer noch erklärt werden (vgl. Abb. 4.17), wenn auch die Tiefe des Minimums nicht mehr ausreichend ist.

Schließen wir zusätzlich auch noch die Dreikörperterme des iterierten Ein-Pion-Austausches

(Hartree- und Fockbeitrag mit drei Medieneinschüben, Gl. (4.15) und (4.16)) aus der Auswertung aus, so ergibt sich:

$$\Lambda_{ohne\ 3N} \approx 774\ MeV \ (\Leftrightarrow r_{ohne\ 3N} \approx 0.174) \rightarrow \begin{cases} \bar{E}(k_{f,0}, \Lambda_{ohne\ 3N}) \approx -0.624\ MeV \\ \kappa(k_{f,0}, \Lambda_{ohne\ 3N}) \approx 72.4\ MeV. \end{cases}$$

Die Einzelbeiträge liefern folgende Werte zur Sättigungsenergie pro Teilchen:

$$\bar{E}_{ohne\ 3N}(k_{f,0}, \Lambda_{ohne\ 3N}) \approx (21.64 + 11.49 - 35.84 - 1.58 + 3.68)\ MeV.$$

kin. 1 π H2 F2 irr.2 π

Es kann jetzt kaum noch von Sättigungsverhalten der Zustandsgleichung gesprochen werden.

Demnach spielen die Dreikörperterme insgesamt eine wesentliche Rolle zur Erklärung der Bindung von Kernmaterie. Sobald auch diejenigen des iterierten Ein-Pion-Austausches vernachlässigt werden, ist kaum noch Sättigung möglich, wie sich an der zugehörigen Energiedichte-Kurve in Abb. 4.17 sehr gut ablesen lässt. Dies ist in guter Übereinstimmung mit den $V_{low\ k}$ -Ergebnissen. Es muss jedoch betont werden, dass der durchgeführte Vergleich seine Grenzen hat. Während wir die einzelnen Wechselwirkungen alle explizit und ausschließlich über Pionenaustausch berechnen, wird im $V_{low\ k}$ -Ansatz ein phänomenologisches Nukleon-Nukleon-Potential mit Hartree-Fock Methoden auf das Vielteilchenproblem übertragen. Der iterierte Ein-Pion-Austausch, der bei uns eine große Rolle spielt, kommt dort in führender Ordnung gar nicht vor. Ein Ansatzpunkt für weitere Diskussionen in dieser Richtung könnte es sein, zu untersuchen, wie sich die von uns systematisch berechneten Einzelbeiträge des Pionenaustausches in den $V_{low\ k}$ -Ansatz übersetzen. Dadurch ließen sich noch genauere Aussagen über eine Korrespondenz der beiden Ansätze feststellen. Desweiteren sei noch darauf hingewiesen, dass die Dreikörperterme in den von uns betrachteten Diagrammen genauso gut als Zweikörperwechselwirkung mit Pauli-geblockten Zwischenzuständen klassifiziert werden könnten.

4.6 Der irreduzible Zwei-Pion-Austausch und Kontaktterme

Bei der Auswertung der Gesamtenergie von isospin-symmetrischer Kernmaterie unter Berücksichtigung aller Einzelbeiträge (vgl. Abschnitt 4.5), konnten wir den empirischen Sättigungspunkt sehr gut reproduzieren und zwar mit nur einem freien Parameter. Es mussten keine zusätzlichen Kontaktterme eingeführt werden, um den Einfluss kurzreichweitiger Effekte auf die Sättigung zu kompensieren bzw. zu parametrisieren. Gerade durch die Methode, die zur Berechnung des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches herangezogen wird, würde man letzteres sogar eher erwarten. Dieser Aspekt soll im Folgenden genau untersucht werden, wozu wir zunächst die Berechnung des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches skizzieren.

4.6.1 Der irreduzible Zwei-Pion-Austausch

Den Ausgangspunkt der Herleitung bildet die T-Matrix elastischer Nukleon-Nukleon Streuung (ohne Coulombkräfte). Im Schwerpunktsystem der beiden Nukleonen hat sie für den Prozess $N(\vec{p}) + N(-\vec{p}) \rightarrow N(\vec{p}') + N(-\vec{p}')$ folgende, allgemeine Form ($q^0 = 0$, $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$):

$$\begin{aligned} T = & V_C + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 W_C + [V_S + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 W_S] \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + [V_T + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 W_T] \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q} \\ & + [V_{SO} + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 W_{SO}] i (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) \\ & + [V_Q + \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 W_Q] \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) \vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{q} \times \vec{p}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Die zehn, i.A. komplexen Funktionen V_C, \dots, W_Q hängen vom Betrag des Impulses $p := |\vec{p}| = |\vec{p}'|$ und dem Betrag des Impulsübertrags $q := |\vec{q}| = |\vec{p}' - \vec{p}| \leq 2p$ ab. (Wir bezeichnen hier also mit p nicht einen Vierervektor sondern den Betrag eines räumlichen, dreikomponentigen Vektors.) Die Indizes bezeichnen die Zentral-, Spin-Spin-, Tensor-, Spin-Bahn- und quadratischen Spin-Bahn-Komponenten, die jeweils in isoskalarer (V) und isovektorieller (W) Form vorkommen.

In führender nichtrelativistischer Näherung gibt es keine Spin-Bahn- und keine quadratischen Spin-Bahn-Komponenten. Die verbleibenden Zwei-Pion-Austauschamplituden sind reell und hängen nur vom Impulsübertrag $q = |\vec{q}|$ ab. Diese Amplituden wurden für alle Diagramme des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches mit bis zu zwei virtuellen Δ -Anregungen in [40] (siehe auch [35]) gerechnet, von uns nochmals bestätigt und sind im Anhang D aufgeführt.

Die Nukleon-Nukleon Streumatrix lässt sich auch allgemein in Form einer Dispersionsrelation darstellen (Allgemeines hierzu z.B. im Anhang von [38]):

$$\text{Re } T(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} dt' \frac{\text{Im } T(t')}{t' - t}, \quad (4.28)$$

wobei das Impulsübertragsquadrat $q^2 = \vec{q}^2 =: -t$ auf die komplexe Ebene ausgedehnt ist. Der Prozess $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ definiert den Beginn des Verzweigungsschnittes auf der reellen Achse - die Integration über t' läuft damit von $4m_\pi^2$ bis ∞ .

Setzt man $t' = \mu^2$ und beschränkt sich wieder auf den physikalischen Bereich mit raumar-tigen t , d.h. $q^2 = |\vec{q}|^2 = -t > 0$, so erhält man für das reelle $T(q)$:

$$T(q) = \frac{2}{\pi} \int_{2m_\pi}^{\infty} d\mu \frac{\mu}{\mu^2 + q^2} \text{Im } T(i\mu). \quad (4.29)$$

Die Spektralfunktion $\text{Im } T(i\mu)$ der Zwei-Pion-Austauschdiagramme wächst stark an. Höhere Impulse jenseits der Gültigkeit der betrachteten niederenergetischen Theorie würden enorm beitragen. Um diese kurzreichweitigen Effekte herauszunehmen, d.h. um die

¹⁵Wie in Gl. (4.28) muss das Argument der Spektralfunktion weiter am Pol des Nenners $t' - t$ liegen. Dieser Nenner hat nun die Form $\mu^2 + q^2$. Deshalb muss das Argument der Spektralfunktion $i\mu$ lauten und nicht μ , wie man es durch die Transformation $t' = \mu^2$ auf den ersten Blick vielleicht erwarten würde.

ultraviolett-divergenten Pion-Schleifendiagramme zu regularisieren, wechselt man auf eine zweifach subtrahierte Version.¹⁶ Mit

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\mu^2 + q^2} &= \frac{1}{\mu} - \frac{q^2}{\mu^3} + \frac{q^4}{\mu^3(\mu^2 + q^2)} \\ &\hookrightarrow T(0) \hookrightarrow \frac{q^2}{2} T''(0) \end{aligned} \quad (4.30)$$

lässt sich Gl. (4.29) schreiben als

$$T(q) = T(0) + \frac{q^2}{2} T''(0) + \frac{2}{\pi} \int_{2m_\pi}^{\infty} d\mu \frac{q^4}{\mu^3(\mu^2 + q^2)} \text{Im } T(i\mu), \quad (4.31)$$

wobei $T''(0) = \frac{\partial^2 T(q)}{\partial q^2} \Big|_{q \rightarrow 0}$.

Über die spin- und isospinkontrahierte Streumatrix lässt sich nun die Energie pro Teilchen im Grundzustand von Kernmaterie gewinnen, indem man die Impulse \vec{p}_1 und \vec{p}_2 (mit $q = |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|$) über Fermikugeln integriert:

$$\bar{E}_{irr. 2\pi}(k_f) = \frac{1}{\rho} \int_{|\vec{p}_{1/2}| < k_f} \frac{d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^6} T(|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|). \quad (4.32)$$

Setzt man hier Gl. (4.31) ein, so erhält man durch Integration von $T(0)$ bzw. von $\frac{q^2}{2} T''(0)$ Terme, die proportional zu ρ bzw. zu $\rho^{5/3}$ sind (äquivalent zu k_f^3 bzw. zu k_f^5). Diese beiden Summanden beschreiben im Wesentlichen die kurzreichweitigen Effekte in der Energie pro Teilchen. Um diese zu kompensieren führt man zusätzliche Subtraktionsterme ein (ebenfalls proportional zu k_f^3 bzw. zu k_f^5). Dadurch könnte man die aus $T(0)$ und $\frac{q^2}{2} T''(0)$ resultierenden Terme im Prinzip vollständig eliminieren. Es ist jedoch durchaus nicht klar, dass diese *alle* kurzreichweitigen Effekte umfassen und ihre Kompensation den Einfluss der hohen Impulse auf den Niederenergiebereich richtig parametrisiert. Vielmehr erwartet man normalerweise, dass dazu noch NN-Kontaktterme übrig bleiben müssten. Dann lautet Gl. (4.32) allgemein (mit $q = |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|$):

$$\bar{E}_{irr. 2\pi}(k_f) = \bar{B}_3 \frac{k_f^3}{M_N^2} + \bar{B}_5 \frac{k_f^5}{M_N^4} + \frac{2}{\rho \pi} \int_{|\vec{p}_{1/2}| < k_f} \frac{d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^6} \int_{2m_\pi}^{\infty} d\mu \frac{q^4}{\mu^3(\mu^2 + q^2)} \text{Im } T(i\mu), \quad (4.33)$$

wobei die Konstanten \bar{B}_3 und \bar{B}_5 dimensionlos definiert sind.

Schließlich setzt man zur Berechnung der Spektralfunktion $\text{Im } T(i\mu)$ noch explizit die spin- und isospinkontrahierte T-Matrix aus Gl. (4.27) ein und verwendet die Integralformel

¹⁶Bereits in der mathematischen Herleitung einer allgemeinen Dispersionsrelation wird klar, warum diese Subtraktionen nötig sein können. Den Ausgangspunkt bildet nämlich Cauchys Integralformel mit der Kontur entlang der reellen Achse und einem Halbkreis mit unendlichem Radius. In Gl. (4.28) wird davon ausgegangen, dass der Integrand und damit das Integral über den Halbkreis im Unendlichen verschwindet. Dies muss aber nicht sein, weshalb die Subtraktionen nötig sein können. Vgl. Anhang in [38].

Gl. (B.2) im Anhang B. Für den Beitrag des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches mit bis zu zwei virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregungen ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{irr.2\pi}(k_f) &= \bar{B}_3 \frac{k_f^3}{M_N^2} + \bar{B}_5 \frac{k_f^5}{M_N^4} + \frac{1}{8\pi^3} \int_{2m_\pi}^{\infty} d\mu \operatorname{Im}(V_C + 3W_C + 2\mu^2 V_T + 6\mu^2 W_T) \\ &\quad \cdot \left\{ 3\mu k_f - \frac{4k_f^3}{3\mu} + \frac{8k_f^5}{5\mu^3} - \frac{\mu^3}{2k_f} - 4\mu^2 \arctan \frac{2k_f}{\mu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu^3}{8k_f^3} (12k_f^2 + \mu^2) \ln \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die einzelnen Teile $\operatorname{Im}V_C, \dots, \operatorname{Im}W_T$ der Spektralfunktion sind jeweils bei $i\mu$ auszuwerten und für die beitragenden Prozesse im Anhang D aufgeführt (vgl. auch [15]).

Im Vergleich zu den bisher betrachteten Rechnungen muss in unserer Überlegung nun noch zusätzlich die Vertexfunktion eingearbeitet werden, wobei auch die Vertizes modifiziert werden müssen, die Δ -Anregungen enthalten. Im Gegensatz zu allen anderen Einzelbeiträgen wurde der irreduzible Zwei-Pion-Austausch nicht direkt mit den Feynmanregeln der geschlossenen Diagramme, sondern über die Dispersionsrelation angesetzt. Es stellt sich heraus, dass für letztere alle bisherigen Überlegungen ohne Vertexkorrektur weiterverwendet werden können und lediglich eine kleine Veränderung der oberen Integralgrenze von Gl. (4.33) sinnvoll und ausreichend ist, um die Vertexkorrektur einzubauen:

Man betrachte bei einer Nukleon-Nukleon Wechselwirkung isoliert den Propagator eines Austauschpions (Viererimpuls k) zusammen mit den beiden Vertexfunktionen an seinen "Endpunkten". Zur Vereinfachung des Arguments werden die zwei Monopolmassen zunächst als verschieden angenommen und mit Λ_1 und Λ_2 bezeichnet. Das Konstrukt lässt sich in drei freie Propagatoren mit unterschiedlichen Massen m_π , Λ_1 , Λ_2 und unterschiedlichen Gewichtungsfaktoren partial zerlegen:

$$\frac{1 - \frac{m_\pi^2}{\Lambda_1^2}}{1 - \frac{k^2}{\Lambda_1^2}} \cdot \frac{i}{k^2 - m_\pi^2} \cdot \frac{1 - \frac{m_\pi^2}{\Lambda_2^2}}{1 - \frac{k^2}{\Lambda_2^2}} = \frac{i}{k^2 - m_\pi^2} - \frac{\Lambda_1^2 - m_\pi^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2} \cdot \frac{i}{k^2 - \Lambda_2^2} + \frac{\Lambda_2^2 - m_\pi^2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2} \cdot \frac{i}{k^2 - \Lambda_1^2}. \quad (4.35)$$

Beim Austausch zweier Pionen taucht dieser Ausdruck quadratisch auf. Neben der Spektralfunktion, die wie bisher bei $2m_\pi$ startet (sie resultiert aus dem Quadrat des freien Pionpropagators), folgen nun weitere, die bei höheren Impulsen einsetzen. Die Polstruktur gibt für die nächste Schwelle der Spektralfunktion (im Grenzfall $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$) die untere Grenze des Verzweigungsschnittes bei $\Lambda + m_\pi = m_\pi(1 + 1/r)$ vor. Ihr Vorzeichen ist entgegengesetzt zu dem der ersten, bei $2m_\pi$ beginnenden Spektralfunktion, wodurch der Einfluss hoher Impulskomponenten gedämpft würde. Da der Wert von $\Lambda + m_\pi$ allerdings bereits an die Grenze der Gültigkeit der chiralen Störungstheorie stößt, stoppen wir dort das Dispersionsintegral. Wir betrachten demnach weiterhin nur die eine, bei $2m_\pi$ beginnende Spektralfunktion, die nun aber bei $\Lambda + m_\pi$ abgeschnitten ist. Der Vertexfaktor geht damit lediglich über die obere Integralgrenze in die Rechnung ein. Das T-Matrixelement

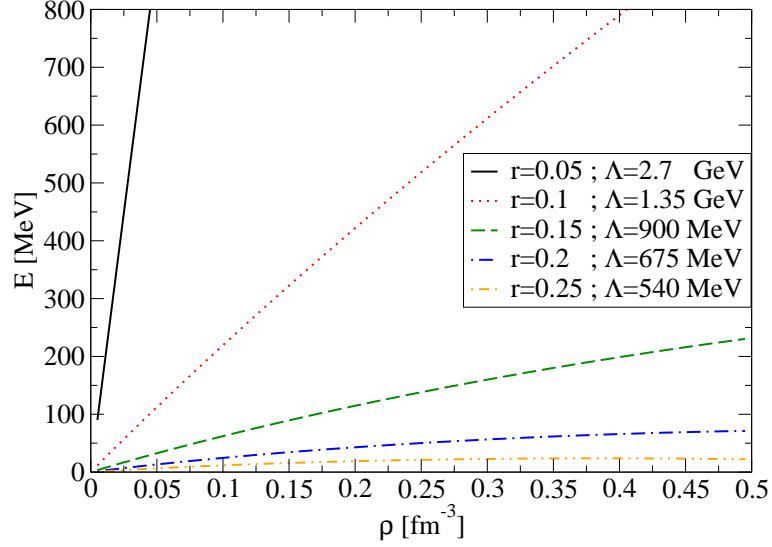


Abbildung 4.18: Differenz des Energiebeitrags des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches (inklusive Vertexfunktion) berechnet mit der vollen bzw. der zweifach subtrahierten Dispersionsrelation als Funktion der Dichte für verschiedene Monopolmassen Λ .

in Form der Dispersionsrelation

$$T_{\Lambda}(q) = \frac{2}{\pi} \int_{2m_{\pi}}^{\Lambda+m_{\pi}} d\mu \frac{\mu}{\mu^2 + q^2} \text{Im} T(i\mu) \quad (4.36)$$

ist nun bereits ohne Subtraktionen endlich. Trotzdem reicht dieser Einfluss der Vertexkorrektur noch nicht aus, um den Zwei-Pion-Austausch ausreichend zu regularisieren. Weitere hohe Impulskomponenten müssen ganz analog zu den früheren Betrachtungen (vgl. Gl. (4.31) und (4.33)) mittels zweier Subtraktionen beseitigt werden, und die Energie pro Teilchen schreibt sich zu (wieder mit $q = |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|$):

$$\begin{aligned} \bar{E}_{irr.2\pi}(k_f, \Lambda) &= \bar{B}_3(\Lambda) \frac{k_f^3}{M_N^2} + \bar{B}_5(\Lambda) \frac{k_f^5}{M_N^4} \\ &+ \frac{2}{\rho \pi} \int_{|\vec{p}_{1/2}| < k_f} \frac{d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^6} \int_{2m_{\pi}}^{\Lambda+m_{\pi}} d\mu \frac{q^4}{\mu^3(\mu^2 + q^2)} \text{Im} T(i\mu). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Im Gegensatz zu Gl. (4.33) sind die Koeffizienten \bar{B}_3 und \bar{B}_5 aufgrund der oberen Grenze des Dispersionsintegrals nun von Λ abhängig.

Abb. 4.18 veranschaulicht nochmals die Notwendigkeit der Subtraktionskonstanten trotz Vertexkorrektur. Für verschiedene Werte von Λ ist der zwar endliche, aber enorme Unterschied zwischen der vollen bzw. zweifach subtrahierten Dispersionsrelation (ohne Kontaktterme) - jeweils mit einkalkulierter Vertexkorrektur - gezeigt.

Verwendet man in Gl. (4.37) wieder die explizite Form der spin- und isospinkontrahierten

T-Matrix, so erhält man endlich die in der Auswertung benutzte Gl. (4.18) - allerdings ohne die beiden Kontaktterme. Es gilt:

$$\bar{E}_{irr.2\pi}(k_f, \Lambda) = \bar{B}_3(\Lambda) \frac{k_f^3}{M_N^2} + \bar{B}_5(\Lambda) \frac{k_f^5}{M_N^4} + \bar{E}_6(k_f, \Lambda). \quad (4.38)$$

4.6.2 Kontaktterme und Renormierung

Nachdem nun ausführlich geklärt ist, wie Gl. (4.18) für den irreduziblen Zwei-Pion-Beitrag zur Energie pro Teilchen zustande kommt, fragt man sich sofort, warum in der Auswertung (Abschnitt 4.5) die beiden Kontaktterme überhaupt nicht einbezogen wurden. Es wurde stets mit $\bar{E}_6(k_f, \Lambda)$ und nicht mit $\bar{E}_{irr.2\pi}(k_f, \Lambda)$ gerechnet. Damit hatte die Rechnung nur einen einzigen freien Parameter, nämlich die Monopolmasse. Durch deren Anpassung konnte der empirische Sättigungspunkt isospin-symmetrischer Kernmaterie sehr gut reproduziert werden.

Daraus schließen wir, dass für die *gesamte* Energie pro Teilchen bei der ermittelten Monopolmasse $\Lambda_0 \approx 1.15$ GeV *keine* Kontaktterme nötig sind. D.h. dass sich die Terme $\bar{B}_3(\Lambda) \frac{k_f^3}{M_N^2} + \bar{B}_5(\Lambda) \frac{k_f^5}{M_N^4}$ des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches zusammen mit weiteren, möglichen Kontakttermen (die zur Kompensation von kurzreichweitigen Effekten anderer Einzelbeiträge gebraucht werden könnten) insgesamt wegheben.

Es muss aber betont werden, dass die Sonderstellung von Λ_0 keine tiefere physikalische Begründung hat. Diese Monopolmasse wurde lediglich durch unsere Bedingung eines Extrempunktes bei $k_{f,0} = 262$ MeV festgelegt. Es ist zufällig, dass in diesem Fall ausgerechnet keine Kontaktterme einzufügen sind. Bei einer Abweichung von Λ_0 muss ganz allgemein mit diesen gerechnet werden, um die neu ein- bzw. ausgeschlossenen Impulse und den Einfluss kurzreichweitiger Effekte auf den Niederenergiebereich zu parametrisieren.

Es muss das Ziel sein, eine Darstellung dieser Kontaktterme in Abhängigkeit von Λ und ρ (bzw. k_f) zu entwickeln. Denn dann können wir den empirischen Sättigungspunkt reproduzieren, ohne auf eine bestimmte, physikalisch unmotiviert Monopolmasse Λ_0 zurückgreifen zu müssen. Unsere Rechnung ist in diesem Sinn dann unabhängig von Λ , d.h. renormierbar.

Zunächst beschränken wir uns zur Verdeutlichung der Vorgehensweise auf den irreduziblen Zwei-Pion-Austausch, da die Λ -Abhängigkeit dieses Beitrags recht überschaubar ist. Für den Unterschied einer Energie-Dichte-Kurve mit einem beliebigen Λ zu derjenigen mit Λ_0 folgt aus Gl. (4.38):

$$\begin{aligned} \bar{E}_{irr.2\pi}(k_f, \Lambda) - \bar{E}_{irr.2\pi}(k_f, \Lambda_0) &= [\bar{B}_3(\Lambda) - \bar{B}_3(\Lambda_0)] \frac{k_f^3}{M_N^2} + [\bar{B}_5(\Lambda) - \bar{B}_5(\Lambda_0)] \frac{k_f^5}{M_N^4} \\ &\quad + \bar{E}_6(k_f, \Lambda) - \bar{E}_6(k_f, \Lambda_0), \end{aligned} \quad (4.39)$$

wobei die Herkunft der Kontaktterme in $\bar{B}_3(\Lambda)$ und $\bar{B}_5(\Lambda)$ in Abschnitt 4.6.1 erläutert wurde.

Nehmen wir einmal an, wir wollten nur den Beitrag des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches unabhängig von der genauen Monopolmasse beschreiben. Dann muss Gl. (4.39) null ergeben und folgende Parametrisierung muss existieren:

$$\begin{aligned} \bar{E}_6(k_f, \Lambda) - \bar{E}_6(k_f, \Lambda_0) &\stackrel{!}{=} -[\bar{B}_3(\Lambda) - \bar{B}_3(\Lambda_0)] \frac{k_f^3}{M_N^2} - [\bar{B}_5(\Lambda) - \bar{B}_5(\Lambda_0)] \frac{k_f^5}{M_N^4} \\ &=: -\bar{B}_3^*(\Lambda) \frac{k_f^3}{M_N^2} - \bar{B}_5^*(\Lambda) \frac{k_f^5}{M_N^4}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Für jeden von uns betrachteten Wert von Λ (Bereich $450 \text{ MeV} \leq \Lambda \leq 2.7 \text{ GeV}$) wurde ein entsprechender Fit über den gesamten Dichtebereich ($0.005 \text{ fm}^{-3} \leq \rho \leq 0.5 \text{ fm}^{-3}$) durchgeführt. Die zugehörigen Koeffizienten $\bar{B}_3^*(\Lambda)$ und $\bar{B}_5^*(\Lambda)$ sind als Funktion von Λ in Abb. 4.19 (links) zu sehen. Der Kontaktterm in k_f^3 spielt demnach eine untergeordnete Rolle gegenüber dem in k_f^5 .

Die Fitfehler sind für alle Λ klein und Figur 4.20 (links) zeigt in Abhängigkeit von der Dichte für einige Monopolmassen den Unterschied des jeweiligen Fits $-\bar{B}_3^*(\Lambda) \frac{k_f^3}{M_N^2} - \bar{B}_5^*(\Lambda) \frac{k_f^5}{M_N^4}$ zum tatsächlichen Wert von $\bar{E}_6(k_f, \Lambda) - \bar{E}_6(k_f, \Lambda_0)$.

Mit Gl. (4.40) konnten wir $\bar{B}_3(\Lambda)$ und $\bar{B}_5(\Lambda)$ und damit die Kontaktterme des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches so einschränken, dass dessen Beitrag unabhängig von der Monopolmasse ist.

Freilich nützt diese Betrachtung für die Untersuchung von Kernmaterie noch nichts. Dazu müssen alle Einzelbeiträge zusammen genommen und die Gesamtenergie pro Teilchen betrachtet werden. Das Vorgehen bleibt jedoch gleich.

Wir gehen davon aus, dass es weiterhin genügt, sich mit NN-Kontakttermen der Form $B_3(\Lambda) \frac{k_f^3}{M_N^2} + B_5(\Lambda) \frac{k_f^5}{M_N^4}$ zu befassen, welche von einer impulsunabhängigen bzw. von einer vom Impulsquadrat abhängigen Kontaktwechselwirkung herrühren. Solche Beiträge stammen vom irreduziblen Zwei-Pion-Austausch, können aber evtl. auch aufgrund anderer kurzreichweitiger Effekte zur Kompensation nötig sein. Die Gesamtenergie pro Teilchen lautet dann:

$$\bar{E}_{total}(k_f, \Lambda) = B_3(\Lambda) \frac{k_f^3}{M_N^2} + B_5(\Lambda) \frac{k_f^5}{M_N^4} + \sum_{i=0}^8 \bar{E}_i(k_f, \Lambda).^{18} \quad (4.41)$$

Von der Auswertung in Abschnitt 4.5 wissen wir, dass die Sättigungskurve für die Monopolmasse Λ_0 sehr gut reproduziert wird, d.h. $B_3(\Lambda_0) = B_5(\Lambda_0) = 0$.

¹⁷Aus der Tatsache, dass für die Gesamtenergie pro Teilchen bei der Monopolmasse Λ_0 keine Kontaktterme nötig sind, d.h. $B_3 = B_5 = 0$, folgt für den Beitrag des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches nicht unbedingt $\bar{B}_3(\Lambda_0) = \bar{B}_5(\Lambda_0) = 0$, denn die zugehörigen Kontaktterme könnten auch endlich sein und sich gegen mögliche NN-Kontaktterme der anderen Einzelbeiträge wegheben.

¹⁸Mit den Einzelbeiträgen $\bar{E}_i(k_f, \Lambda)$ sind diejenigen aus Abschnitt 4.4 gemeint und es gilt wie dort $\bar{E}_{ges}(k_f, \Lambda) := \sum_{i=0}^8 \bar{E}_i(k_f, \Lambda)$.

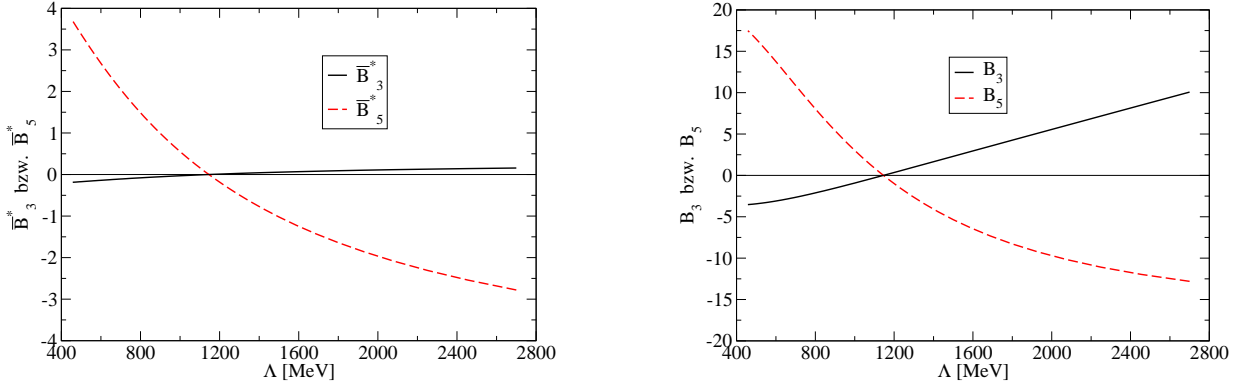


Abbildung 4.19: Für den irreduziblen Zwei-Pion-Austausch (links) bzw. die Gesamtenergie pro Teilchen (rechts) sind gegen Λ die Parameter (laufende Kopplungskonstanten) des Fits in k_f^3/M_N^2 und k_f^5/M_N^4 vom Unterschied einer beliebigen $\bar{E} - \rho$ -Kurve zur Sättigungskurve mit Λ_0 aufgetragen.

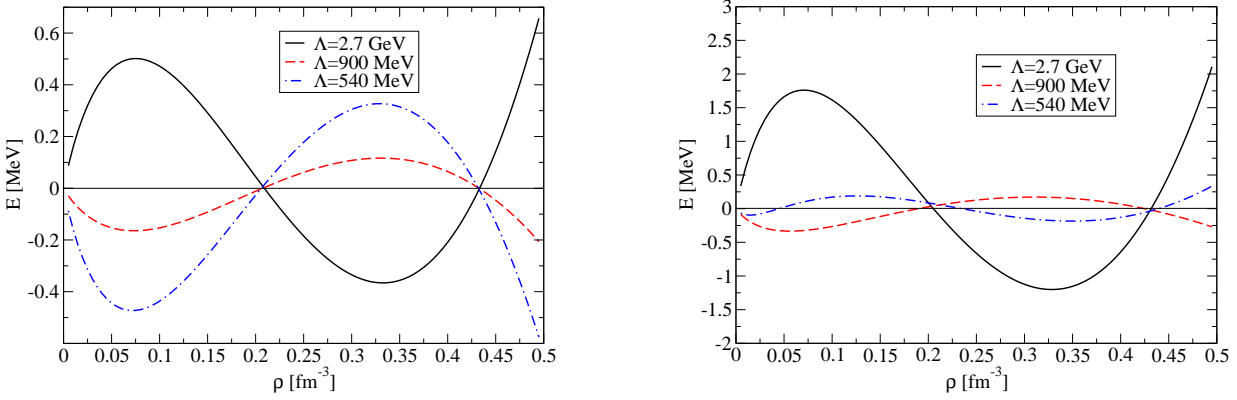


Abbildung 4.20: Fehler des Fits mit den Parametern aus Abb. 4.19 in Abhängigkeit von der Dichte für drei konkrete Werte von Λ .

Die Forderung muss nun aber sein, dass $\bar{E}_{total}(k_f, \Lambda)$ die Sättigungskurve unabhängig von Λ beschreibt. Das bedeutet, dass die Differenz von $\bar{E}_{total}(k_f, \Lambda)$ zu $\bar{E}_{total}(k_f, \Lambda_0)$ für jedes Λ und alle k_f Null sein muss:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{total}(k_f, \Lambda) - \bar{E}_{total}(k_f, \Lambda_0) &= B_3(\Lambda) \frac{k_f^3}{M_N^2} + B_5(\Lambda) \frac{k_f^5}{M_N^4} \\ &\quad + \bar{E}_{ges}(k_f, \Lambda) - \bar{E}_{ges}(k_f, \Lambda_0) \\ &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Aus dieser Bedingung lassen sich die Koeffizienten $B_3(\Lambda)$ und $B_5(\Lambda)$ als Funktion von Λ bestimmen durch:

$$\bar{E}_{ges}(k_f, \Lambda) - \bar{E}_{ges}(k_f, \Lambda_0) \stackrel{!}{=} -B_3(\Lambda) \frac{k_f^3}{M_N^2} - B_5(\Lambda) \frac{k_f^5}{M_N^4}. \quad (4.43)$$

Die linke Seite der Gleichung wurde hierzu wieder für 51 Werte von Λ im Bereich $450 \text{ MeV} \leq \Lambda \leq 2.7 \text{ GeV}$ jeweils über eine Dichte von $0.005 \text{ fm}^{-3} \leq \rho \leq 0.5 \text{ fm}^{-3}$ ausgewertet. Die Anpassung der Koeffizienten funktioniert stets sehr gut und Abb. 4.19 (rechts) zeigt sie als Funktionen von Λ . Die dabei begangenen, stets kleinen Fehler sind in Figur 4.20 (rechts) für einige Monopolmassen als Funktion der Dichte dargestellt.

Mit den soeben ermittelten Koeffizienten $B_3(\Lambda)$ und $B_5(\Lambda)$ reproduziert Gl. (4.41) für jedes Λ die Sättigungskurve. Die Auswirkungen der durch eine Variation der Monopolmasse hinzukommenden bzw. wegfallenden Impulse können im gesamten betrachteten Bereich von Λ durch zwei einfache Kontaktterme, proportional zu k_f^3 bzw. k_f^5 , mit laufenden Koppelungskonstanten kompensiert werden. Die observablen Größen (Energie pro Teilchen am Sättigungspunkt, Kompressibilität) ändern sich bis auf sehr kleine Abweichungen im Prozentbereich nicht. Es ist keineswegs trivial, dass unsere Rechnung diese Eigenschaft besitzt. Die dadurch erreichte Unabhängigkeit der Ergebnisse von der genauen Wahl der Monopolmasse stellt eine interessante Verbindung zur Modellunabhängigkeit des $V_{low k}$ -Potentials her.

4.7 Entwicklung nach $r = m_\pi/\Lambda$

Zum Abschluss dieses Kapitels über die Zustandsgleichung isospin-symmetrischer Kernmaterie, seien noch einige Bemerkungen zum verwendeten Zählschema ergänzt. Es wird durch die Einführung der großen Monopolmasse Λ über die π NN-Vertexfunktion stark beeinflusst.

Wie in Kap. 2.5 bereits angeführt, gibt es in der chiralen Störungstheorie neben der Pionzerfallskonstante f_π durch die Einführung der Baryonen eine zweite große und dimensionsbehaftete Skala: Die Nukleonenmasse M_N , welche weder im chiralen Limes verschwindet noch klein gegenüber der charakteristischen Skala Λ_χ ist. Ein konsistentes Zählschema wird durch die Beschränkung auf den führenden, nichtrelativistischen Term der Entwicklung in $1/M_N$ erreicht.

Durch die π NN-Vertexfunktion kommt mit Λ noch eine weitere große Skala ins Spiel. Konsequenterweise würde man erwarten, dass auch hier eine Entwicklung nach $r = m_\pi/\Lambda$ Sinn macht und eine Betrachtung der führenden Terme ausreicht. In der Praxis ist dies jedoch nicht richtig, was im Folgenden demonstriert wird:

Zunächst berechneten wir alle Diagramme (bis auf diejenigen des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches, wo die Dispersionsrelation verwendet wurde) Ordnung für Ordnung in r (bis einschließlich r^5). Dies stellte sich im Nachhinein als wesentlich aufwändiger heraus als die Rechnungen mit der vollen r -Abhängigkeit. Es zeigte sich zudem, dass die Entwicklung in r nicht konvergiert und die Rechnungen damit unbrauchbar sind: Der Umstand, dass bis zu vier Vertexfunktionen in einer Schleife auftreten bedingt große kombinatorische Faktoren, die den "wahren" Entwicklungsparameter auf ein Vielfaches von r anwachsen lassen. Zudem tragen die einzelnen Ordnungen alternierende Vorzeichen, was in Abb. 4.21-4.24

veranschaulicht ist. Für die Werte $r = 0.05$ ($\Lambda = 540$ MeV), $r = 0.15$ ($\Lambda = 900$ MeV) und $r = 0.25$ ($\Lambda = 2.7$ GeV) sind dort die Einzelbeiträge zur Energie pro Teilchen, jeweils bis einschließlich r^3 bzw. r^5 entwickelt, gegenübergestellt.

Obwohl eine Entwicklung in $r = m_\pi/\Lambda$ also naheliegend und formal konsistent wäre, darf sie nicht ausgeführt werden, um verlässliche Ergebnisse zu erzielen.

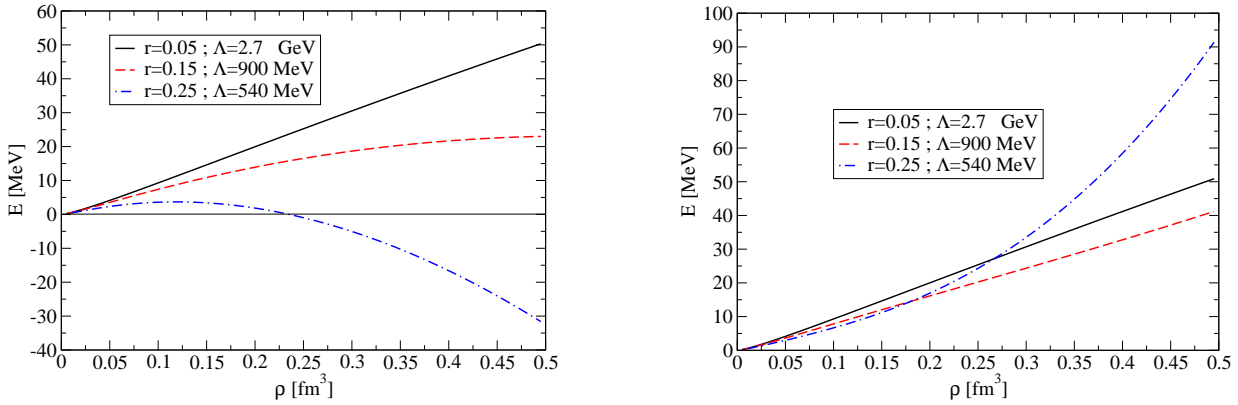


Abbildung 4.21: Energiebeitrag des Ein-Pion-Austausches in Abhängigkeit von der Dichte für drei verschiedene Werte der Monopolmasse Λ . Dargestellt sind Entwicklungen in $r = m_\pi/\Lambda$ bis einschließlich r^3 (links) bzw. r^5 (rechts).

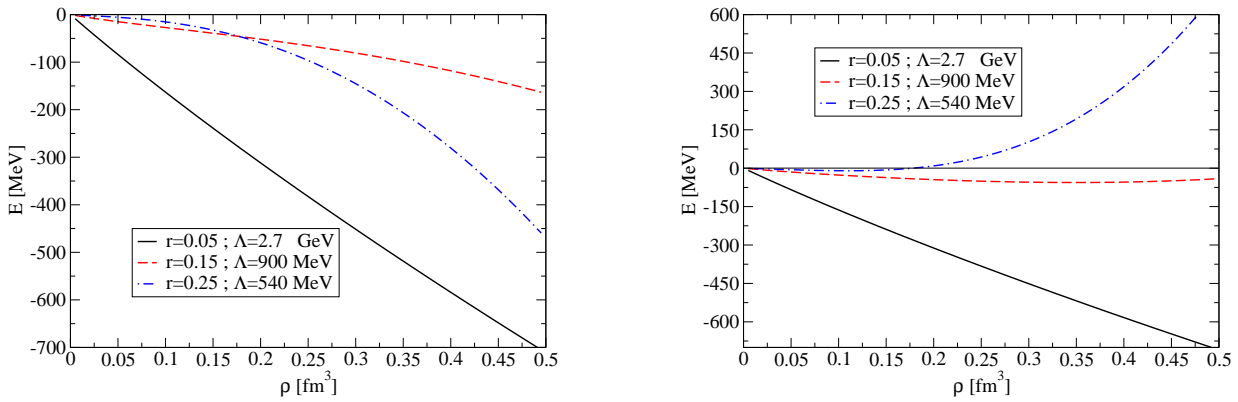


Abbildung 4.22: Energie pro Teilchen des iterierten Ein-Pion-Austausches als Funktion der Dichte. Gezeigt sind Entwicklungen in r bis einschließlich r^3 (links) bzw. r^5 (rechts) für drei verschiedene Werte von Λ .

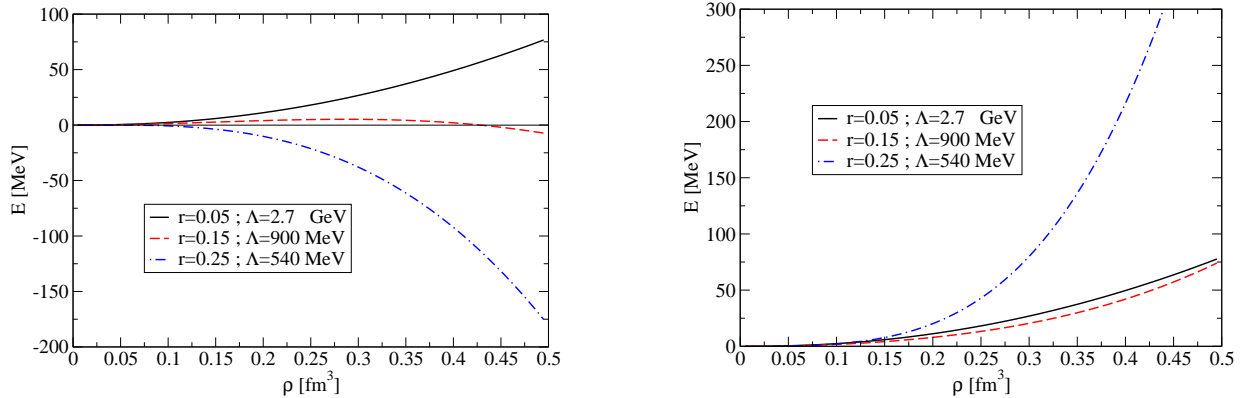


Abbildung 4.23: Energie pro Teilchen der Dreikörperterme des Zwei-Pion-Austausches als Funktion der Dichte für drei verschiedene Werte der Monopolmasse Λ . Gezeigt sind Entwicklungen in $r = m_\pi/\Lambda$ bis einschließlich r^3 (links) bzw. r^5 (rechts).

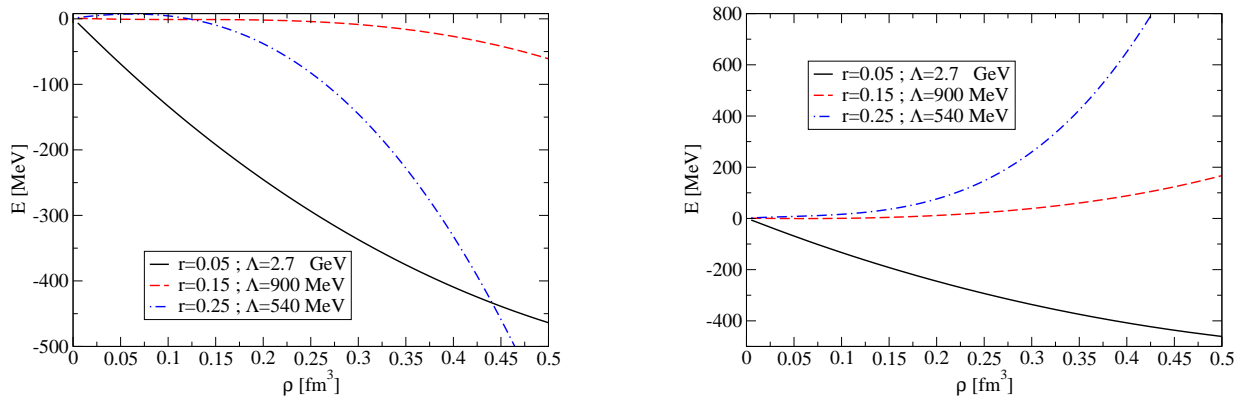


Abbildung 4.24: Gesamtenergie pro Teilchen als Funktion der Dichte. Dargestellt sind Entwicklungen in r bis einschließlich r^3 (links) bzw. r^5 (rechts) für drei verschiedene Werte von Λ .

Kapitel 5

Asymmetrische Kernmaterie

Die bisher verwendete Theorie kann auch auf isospin-asymmetrische Kernmaterie ausgedehnt werden. In der Bethe-Weizsäcker Massenformel für endliche Kerne (vgl. Kap. 2) verschwindet der Term in a_A dann nicht mehr. Je schwerer der Kern, desto größer muss der Neutronenüberschuss (und damit die Asymmetrie) sein, um Stabilität zu erreichen.

5.1 Asymmetrieenergie

Die Energie pro Teilchen, die mit der Differenz der Protonen- und Neutronenzahlen verknüpft ist, bezeichnet man als Asymmetrieenergie. Um diese für Kernmaterie zu berechnen, muss man in den bisherigen Rechnungen lediglich den Medieneinschub des Nukleonpropagators (vgl. Gl. (4.5)) wie folgt ändern:

$$\Theta(k_f - |\vec{p}|) \rightarrow \Theta(k_n - |\vec{p}|) \frac{1 - \tau_3}{2} + \Theta(k_p - |\vec{p}|) \frac{1 + \tau_3}{2}. \quad (5.1)$$

Dabei bezeichnen k_n und k_p die unterschiedlichen Fermiimpulse für Protonen und Neutronen, bis zu denen der jeweilige Fermisee gefüllt ist. Die Isospinprojektoren $(1 \pm \tau_3)/2$ sorgen für die richtige Zuordnung der beiden Fermiimpulse zu Neutronen bzw. Protonen. In der folgenden Diskussion beschränken wir uns auf den Fall einer *kleinen*, relativen Differenz zwischen Neutronenzahl N ¹ und Protonenzahl Z und definieren den Grad der Asymmetrie als:

$$\delta = \frac{N - Z}{N + Z}. \quad (5.2)$$

Im Fall eines Neutronenüberschusses ist δ positiv, im Fall eines Protonenüberschusses negativ. Mit diesem Parameter lassen sich die Fermiimpulse als

$$k_{n/f} = k_f(1 \pm \delta)^{1/3} \quad (5.3)$$

¹Das N für Neutronenzahl ist nicht mit der ebenfalls gebrauchten Abkürzung N für Nukleon zu wechseln.

schreiben. Die Nukleonendichte

$$\rho = \rho_n + \rho_p = \frac{k_n^3 + k_p^3}{3\pi^2} = \frac{2k_f^3}{3\pi^2}, \quad (5.4)$$

ist dann unabhängig vom Asymmetrieparameter δ .

Mit der veränderten Zustandsdichte aus Gl. (5.1) unterscheiden sich die Berechnungen der einzelnen Diagramme vom analogen isospin-symmetrischen Fall nur durch geänderte Isospinfaktoren und andere Radien der Fermikugeln. Die Struktur der Ergebnisse bleibt erhalten. Führt man eine Entwicklung der Energie pro Teilchen in dem kleinen Parameter δ durch, so identifiziert man die Asymmetrieenergie als Koeffizienten von δ^2 . Der Koeffizient von δ^0 stellt die bereits bekannte Energie pro Teilchen in isospin-symmetrischer Kernmaterie ($\delta = 0 \Leftrightarrow k_p = k_n = k_f$) dar:

$$\bar{E}_{asym}(k_p, k_n) = \bar{E}_{sym}(k_f) + \delta^2 \bar{A}(k_f) + \dots \quad (5.5)$$

Wie in der Bethe-Weizsäcker Massenformel (Asymmetrieenergie $\propto (N-Z)^2$) zeigt sich auch in Gl. (5.5), dass die Asymmetrieenergie selbst unabhängig davon ist, ob ein Neutronen- oder Protonenüberschuss vorliegt: Es treten nur gerade Ordnungen in δ auf. Dies liegt an der Isospinsymmetrie der Wechselwirkung, die die Energie des Vielkuleonsystems unter Austausch von Protonen und Neutronen ungeändert lässt. Da wir ein kleines δ annehmen, vernachlässigen wir alle höheren Ordnungen und beschränken uns auf den Term in δ^2 .

5.1.1 Einzelbeiträge zur Asymmetrieenergie

In diesem Abschnitt geben wir die Ergebnisse der einzelnen Beiträge zur Asymmetrieenergie explizit an, wobei wir die Definitionen aus Kap. 4 übernehmen. Die Berechnungen verlaufen völlig analog zu denen in isospin-symmetrischer Kernmaterie und werfen keine größeren oder neuen Probleme auf. Für die meisten Integrationen erweisen sich die Formeln im Anhang B als hilfreich.

Kinetische Energie

Für den Beitrag der kinetischen Energie zur Asymmetrieenergie erhält man:

$$\bar{A}_0(k_f) = \frac{k_f^2}{6M_N} - \frac{k_f^4}{12M_N^3} + \frac{k_f^6}{16M_N^5}. \quad (5.6)$$

Ein-Pion-Austausch

Der Beitrag des Fockdiagramms mit zwei Medieneinschüben (Abb. 4.4) lautet inklusive der relativistischen M_N^{-2} -Korrektur:

$$\begin{aligned}
A_1(k_f, r) = & \frac{g_A^2 m_\pi^3}{(4\pi f_\pi)^2} \left\{ \left(\frac{1}{8u} + \frac{u}{3} \right) \ln(1 + 4u^2) + \frac{3 - 6r^2 + 8r^4 u^2}{24r^4 u} \ln(1 + 4u^2 r^2) \right. \\
& - \frac{(1 - r^2)u(3 + 8r^2 u^2)}{6r^2(1 + 4r^2 u^2)} \\
& + \frac{m_\pi^2}{M_N^2} \left[-\frac{u^2}{2} \arctan(2u) - \frac{(1 - 3r^2)u^2}{4r^3} \arctan(2ur) \right. \\
& \left. \left. + \frac{u^3}{3} [\ln(1 + 4u^2 r^2) - \ln(1 + 4u^2)] + \frac{(1 - r^2)u^3(3 + 8r^2 u^2)}{6r^2(1 + 4r^2 u^2)} \right] \right\}. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Iterierter Ein-Pion-Austausch

Der iterierte Ein-Pion-Austausch liefert wieder Terme proportional zu der großen Skala M_N .

Für das dominant beitragende Hartreeddiagramm mit zwei Medieneinschüben (Abb. 4.5 links) findet man:

$$\begin{aligned}
A_2(k_f, r) = & \frac{g_A^4 M_N m_\pi^4}{(8\pi)^3 f_\pi^4} \left\{ \frac{16(1 + r^2)u^2}{1 - r^2} [\arctan(2ur) - \arctan(2u)] \right. \\
& + \frac{7 + r^2 + 10u^2(5 + 3r^2)}{6u(1 - r^2)} \ln(1 + 4u^2) \\
& - \frac{1 - 7r^2 + 35r^4(1 + r^2) + 10r^2 u^2(-1 + 15r^2 + 45r^4 + 5r^6)}{48r^5(1 - r^2)u} \ln(1 + 4u^2 r^2) \\
& - \frac{-11(1 + r) + 46r^2 + 214r^3 + 61r^4 + 85r^5}{36r^3(1 + r)} u \\
& \left. + \frac{(1 - r^2)^2 u}{18r^3(1 + 4u^2 r^2)^2} - \frac{(1 - r^2)(5 - 11r^2)u}{18r^3(1 + 4u^2 r^2)} \right\}. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich für die Asymmetrieenergie des Fockdiagramms mit zwei Me-
dieneinschüben (zweites von links in Abb. 4.5):

$$\begin{aligned}
\bar{A}_3(k_f, r) = & \frac{g_A^4 M_N m_\pi^4}{(4\pi)^3 f_\pi^4} \int_0^u dx \frac{3x^2 - 4u^2}{3u} \left\{ \frac{1 + 8x^2 + 8x^4}{2(1 + 2x^2)} \arctan x \right. \\
& - \frac{(1 - r^2)^2(1 + 4x^2)}{2(1 + 2x^2)(1 + r^2(1 + 4x^2))^2} \arctan(2x) \\
& + x(1 - r^2) \left[\frac{1}{1 + r^2(1 + 4x^2)} + \frac{1 + r^2(1 + 4x^2)}{(1 + r^2(1 + 4x^2))^2 - 4r^2} \right] \\
& + \left[\frac{(1 - r^2)^2}{4r^2(1 + 2r^2x^2)^3} + \frac{1 + 2r^4x^2}{2(1 + 2r^2x^2)^2} \right] [\arctan(2rx) - \arctan(rx)] \\
& + (1 + 2x^2) \arctan(rx) - \frac{1 + r^4(1 + 4x^2)}{(1 + r^2(1 + 4x^2))^2} \arctan(2rx) \\
& + \left[1 + 2x^2 - \frac{1 + r^4(1 + 4x^2)}{(1 + r^2(1 + 4x^2))^2} \right] \left[\arctan \frac{4r^2x}{1 - r^2(1 - 4x^2)} \right. \\
& \quad \left. - \arctan \frac{2rx}{1 + r} - \arctan \frac{2rx}{1 - r} \right] \\
& + \frac{x}{r}(1 - r^2) \left[\frac{4r^2x^2(r^2 - 2) + 5r^2 - 9}{16(1 + r^2x^2)^2} - \frac{1 + r^2x^2(1 + r^2)}{(1 + 2r^2x^2)^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{1 + r^2(1 + 4x^2)} - \frac{2r^2}{(1 + r^2(1 + 4x^2))^2 - 4r^2} \right] \left. \right\}. \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Das Hartreedigramm mit drei Medieneinschüben (zweites von rechts in Abb.4.5) trägt wie folgt bei:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_4(k_f, r) = & \frac{g_A^4 M_N m_\pi^4}{(4\pi f_\pi)^4 u^3} \int_0^u dx x^2 \int_{-1}^1 dy \left\{ \frac{1+r^2}{3(1-r^2)} \left(26uxy - \frac{4ux^3y^3}{u^2-x^2y^2} + 3(3u^2-5x^2y^2) \right. \right. \\
& \left. \left. \ln \frac{u+xy}{u-xy} \right) \cdot \left[s^2 \frac{2+s^2}{1+s^2} - 2\ln(1+s^2) + 2\ln(1+r^2s^2) \right] \right. \\
& + \frac{4s^2u^2}{9(1-r^2)(1+s^2)^2(1+r^2s^2)^4} \left(6r^2(1+r^2) + 3r^2(1+r^2)(4+7r^2)s^2 \right. \\
& \quad + (-3+27r^2+8r^4+108r^6+6r^8+4r^{10})s^4 \\
& \quad + r^2(6+25r^2+68r^4+72r^6+8r^8+r^{10})s^6 \\
& \quad + 2r^4(7+11r^2+30r^4+11r^6+r^8)s^8 \\
& \quad \left. + r^6(11+12r^2+18r^4+r^6)s^{10} + 3r^8(1+r^2)s^{12} \right) \ln \frac{u+xy}{u-xy} \\
& + \frac{s^2}{9(1-r^2)(1+s^2)(1+r^2s^2)^3} \left[2uxy + (u^2-x^2y^2) \ln \frac{u+xy}{u-xy} \right] \\
& \cdot \left[\frac{2r^2x^2y^2}{(u^2-x^2y^2)} \left(6(1+r^2) + 3(1+r^2)(2+5r^2)s^2 \right. \right. \\
& \quad + (6+5r^2+36r^4+6r^6+r^8)s^4 + r^2(8+6r^2+15r^4+r^6)s^6 \\
& \quad \left. \left. + 3r^4(1+r^2)s^8 \right) \right. \\
& - \frac{1}{(1+s^2)^2(1+r^2s^2)^2} \left(78r^2(1+r^2) \right. \\
& \quad + [117r^2(2+5r^2+3r^4) - 120(1-r^2)^5R^2]s^2 \\
& \quad + [13(-9+69r^2-r^4+228r^6-3r^8+10r^{10}) \\
& \quad \quad - 24(1-r^2)^5(1-3r^2)R^2]s^4 \\
& \quad + [-81+r^2(594+546r^2+3181r^4+2541r^6+246r^8+71r^{10}) \\
& \quad \quad \left. + 168(1-r^2)^5R^2]s^6 \right. \\
& \quad + r^2(69+786r^2+1899r^4+3704r^6+1554r^8+165r^{10}+13r^{12})s^8 \\
& \quad + 13r^4(20+72r^2+162r^4+172r^6+33r^8+3r^{10})s^{10} \\
& \quad + 13r^6(25+48r^2+93r^4+41r^6+3r^8)s^{12} \\
& \quad + 13r^8(14+18r^2+21r^4+r^6)s^{14} + 39r^{10}(1+r^2)s^{16} \\
& \quad + 24(1-r^2)^5[10R-T + (2(3+r^2)R - (1+r^2)T)s^2 \\
& \quad \left. \left. - r^2(2R+T)s^4]s^3 \right) \right] \left. \right\}. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Zusätzlich zu der aus isospin-symmetrischer Kernmaterie bekannten Definition $s := xy + \sqrt{u^2 - x^2 + x^2y^2}$ werden $R := u \frac{\partial s}{\partial u}$ und $T := u^2 \frac{\partial^2 s}{\partial u^2}$ verwendet.

Das Fockdiagramm mit drei Medieneinschüben (Abb. 4.5 rechts) stellt den Beitrag:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_5(k_f, r) = & \frac{g_A^4 M_N m_\pi^4}{(4\pi f_\pi)^4 u^3} \int_0^u dx \left\{ \frac{G_r}{24} (3G_{r,20} - 2G_{r,11} + 3G_{r,02} - 8G_{r,01} - 3G_r) \right. \\
& + \frac{G_{r,10} + G_{r,01}}{24} (3G_{r,10} - 5G_{r,01}) \\
& + x^2 \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 dz \frac{yz\Theta(y^2 + z^2 - 1)}{|yz|\sqrt{y^2 + z^2 - 1}} \\
& \left[\frac{(1-r^2)^2 s^2}{6(1+s^2)^2(1+r^2 s^2)^3(1+r^2 t^2)} \left(-16Rs(3 + (2+r^2)s^2) + 8R^2 \right. \right. \\
& \cdot (3 + (1-r^2)s^2 - 3r^2 s^4) + 3s^2[7 + s^2(5 + r^2(3 + s^2))] \\
& \left. \left. + 8(1+r^2 s^2)(1+s^2)sT \right) \cdot \left(-(1-r^2)t^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + (1+r^2 t^2)[\ln(1+t^2) - \ln(1+r^2 t^2)] \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{(1-r^2)^4(8R-3s)s^3 t^4}{3(1+s^2)(1+r^2 s^2)^2(1+t^2)(1+r^2 t^2)^2} \right] \right\}. \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Die Funktion $G_r(x, u)$ ist weiterhin wie in Gl. (4.17) definiert und die zugehörigen, partiellen Ableitungen fließen in die Definitionen $G_{r,ij}(x, u) := x^i u^j \frac{\partial^{i+j} G_r(x, u)}{\partial x^i \partial u^j}$ ($1 \leq i + j \leq 2$) ein.

Irreduzibler Zwei-Pion-Austausch mit bis zu zwei virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregungen

In diese Kategorie fallen wieder die Feynmangraphen aus den Abb. 4.6-4.8. Insgesamt erhält man in der Dispersionsrelationsdarstellung:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_6(k_f, \Lambda) = & \frac{1}{12\pi^3} \int_{2m_\pi}^{\Lambda+m_\pi} d\mu \left\{ \text{Im}(V_C + 2\mu^2 V_T) \left[\mu k_f - \frac{2k_f^3}{\mu} + \frac{16k_f^5}{3\mu^3} - \frac{\mu^3}{4k_f} \ln \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2} \right) \right] \right. \\
& \left. + \text{Im}(W_C + 2\mu^2 W_T) \left[3\mu k_f + \frac{2k_f^3}{\mu} - \frac{\mu}{4k_f} (8k_f^2 + 3\mu^2) \ln \left(1 + \frac{4k_f^2}{\mu^2} \right) \right] \right\}. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

In dieser Formel sind noch keine Kontaktterme proportional zu k_f^3 bzw. k_f^5 enthalten. Diese sind nötig, da konsequenterweise das gleiche Regularisierungsschema mit zwei Subtraktionen und π NN-Vertexkorrektur verwendet wurde wie in isospin-symmetrischer Kernmaterie (vgl. Abschnitt 4.6.1). Vollständig lässt sich der Beitrag des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches mit zwei Medieneinschüben und ohne Δ -Anregungen dann, ganz analog zu Gl. (4.38), wie folgt formulieren:

$$\bar{A}_{irr.2\pi}(k_f, \Lambda) = [2\bar{B}_{n,3}(\Lambda) - \bar{B}_3(\Lambda)] \frac{k_f^3}{M_N^2} + [3\bar{B}_{n,5}(\Lambda) - \bar{B}_5(\Lambda)] \frac{10k_f^5}{9M_N^4} + \bar{A}_6(k_f, \Lambda). \quad (5.13)$$

Per Konvention (vgl. [15]) haben wir dabei die Darstellung der Kontaktterme mit den Koeffizienten $\bar{B}_3(\Lambda)$ und $\bar{B}_5(\Lambda)$ aus isospin-symmetrischer Kernmaterie gewählt. In dieser Darstellung tauchen zwei weitere Parameter auf: $\bar{B}_{n,3}(\Lambda)$ und $\bar{B}_{n,5}(\Lambda)$. Sie werden sich bei der Betrachtung von reiner Neutronenmaterie als die dortigen Kopplungskonstanten herausstellen.

Es sei noch angemerkt, dass die den Fockdiagrammen ohne explizite Δ -Anregung (Abb. 4.6) entsprechenden Hartreedigramme nun auch einen nicht-verschwindenden Anteil proportional zu ρ beitragen - im Gegensatz zu isospin-symmetrischer Kernmaterie. Wegen ihrer Dichteabhängigkeit werden diese Beiträge jedoch in den Kontakttermen mit $B_3(\Lambda)$ und $B_{n,3}(\Lambda)$ aufgenommen.

Dreikörperterme des Zwei-Pion-Austausches mit einer virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregung

Die zugehörigen Feynmandiagramme, Abb. 4.9, zeigen ganz links den Hartreegraphen, welcher folgenden Beitrag liefert:

$$\begin{aligned} \bar{A}_7(k_f, r) = & \frac{g_A^4 m_\pi^6 u^2}{9\Delta(2\pi f_\pi)^4} \left\{ \frac{3(3+r^2) + 16(1+r^2)u^2}{4(1-r^2)} [\ln(1+4u^2) - \ln(1+4u^2r^2)] \right. \\ & - \frac{u^2}{3(1+4u^2)(1+4u^2r^2)^3} [9(3+r^2) + 6(17+56r^2+15r^4)u^2 \\ & + 24(1+47r^2+61r^4+11r^6)u^4 + 32r^2(9+124r^2+79r^4+4r^6)u^6 \\ & \left. + 512r^4(1+10r^2+r^4)u^8 \right\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Im Gegensatz zu isospin-symmetrischer Kernmaterie verschwindet das ungekreuzte Fockdiagramm (Abb. 4.9 rechts) nun ebenfalls nicht und es ergibt zusammen mit dem gekreuzten (Abb. 4.9 Mitte):

$$\begin{aligned} \bar{A}_8(k_f, r) = & \frac{g_A^4 m_\pi^6}{36\Delta(4\pi f_\pi)^4 u^3} \left\{ \int_0^u dx \left[4G_{S,r,01}G_{S,r,10} - 2G_{S,r,01}^2 - 6G_{S,r,10}^2 \right. \right. \\ & + 2G_{S,r}(3G_{S,r} + 8G_{S,r,01} - 3G_{S,r,02} + 2G_{S,r,11} - 3G_{S,r,20}) \\ & + 2G_{T,r,01}G_{T,r,10} - 7G_{T,r,01}^2 - 3G_{T,r,10}^2 \\ & \left. \left. + G_{T,r}(3G_{T,r} + 8G_{T,r,01} - 3G_{T,r,02} + 2G_{T,r,11} - 3G_{T,r,20}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Hierbei ist $G_{I,r}(x, u)$ wiederum aus dem isospin-symmetrischen Fall übernommen und steckt partiell abgeleitet in der Definition $G_{I,r,jk}(x, u) := x^j u^k \frac{\partial^{j+k} G_{I,r}(x, u)}{\partial x^j \partial u^k}$, $I \in \{S, T\}$, $1 \leq j+k \leq 2$.

5.1.2 Auswertung

Fasst man alle Einzelbeiträge zu einem gesamten Ausdruck für die Asymmetrieenergie zusammen, so erhält man mit allgemeinen Kontakttermen, deren Form analog zu isospin-symmetrischer Kernmaterie (siehe Gl. (4.41)) aus den Kontakttermen des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches abgeleitet wird:

$$\bar{A}_{total}(k_f, \Lambda) = [2B_{n,3}(\Lambda) - B_3(\Lambda)] \frac{k_f^3}{M_N^2} + [3B_{n,5}(\Lambda) - B_5(\Lambda)] \frac{10k_f^5}{9M_N^4} + \sum_{i=0}^8 \bar{A}_i(k_f, \Lambda). \quad (5.16)$$

$B_{n,3}(\Lambda)$ und $B_{n,5}(\Lambda)$ werden sich in Neutronenmaterie als die einzigen Kopplungsstärken herausstellen, während $B_3(\Lambda)$ und $B_5(\Lambda)$ bereits aus isospin-symmetrischer Kernmaterie bekannt sind, wo sie in Abhängigkeit von Λ so angepasst wurden, dass die Zustandsgleichung unabhängig von Λ reproduziert wird. Selbstverständlich könnten wir hier auch wieder von einer beliebigen Monopolmasse ausgehen und die entsprechenden Kopplungskonstanten (vgl. Abb. 4.19 rechts) verwenden. Am naheliegendsten ist jedoch die Wahl von $\Lambda_0 \approx 1.15$ GeV, denn dafür vereinfacht sich Gl. (5.16) mit $B_3(\Lambda_0) = B_5(\Lambda_0) = 0$ zu:

$$\bar{A}_{total}(k_f, \Lambda_0) = 2B_{n,3}(\Lambda_0) \frac{k_f^3}{M_N^2} + 3B_{n,5}(\Lambda_0) \frac{10k_f^5}{9M_N^4} + \sum_{i=0}^8 \bar{A}_i(k_f, \Lambda_0). \quad (5.17)$$

Zur Bestimmung von $B_{n,3}(\Lambda_0)$ und $B_{n,5}(\Lambda_0)$ benutzen wir zunächst den Wert der Asymmetrieenergie an der Sättigungsdichte, $\bar{A}_{total}(k_{f,0}) = 33.2$ MeV, aus [42]. Dieser wurde durch ausgefeilte Anpassung des Tröpfchenmodells für Atommassen (inklusive von Schalen- und Deformationsenergien) an empirische Werte für Bindungsenergien und Spaltbarrieren ermittelt. Der Wert stimmt sehr gut mit (34 ± 2) MeV aus relativistischer mean-field Rechnung (vgl. [30]) überein. Auch [43] liefert mittels relativistischer Dirac-Brückner Methode, angewandt auf das Bonn A-NN-Potential, einen Wert von ≈ 34 MeV.

Die Forderung $\bar{A}_{total}(k_{f,0}, \Lambda_0) \stackrel{!}{=} 33.2$ MeV bedingt die Beziehung:

$$B_{n,5}(\Lambda_0) \approx -6.57 - 7.71B_{n,3}(\Lambda_0). \quad (5.18)$$

Den zweiten benötigten Zusammenhang, um auch $B_{n,3}(\Lambda_0)$ festzulegen, wählen wir in Neutronenmaterie. Die Ergebnisse hierzu stellen wir im Folgenden zunächst dar, bevor wir die Auswertung der Asymmetrieenergie zusammen mit der von Neutronenmaterie fortsetzen.

5.2 Neutronenmaterie

Isospin-symmetrische Kernmaterie mit $N = Z$ ($\delta = 0$) stellt einen Grenzfall asymmetrischer Kernmaterie dar, in welchem die Asymmetrie völlig verschwindet. Der andere Grenzfall, für den die Asymmetrieenergie ihren maximalen Wert annimmt, bildet Neutronenmaterie mit $Z = 0$ ($\delta = 1$). Es ist kein stark gebundenes System aus Neutronen

bekannt und gerade weil experimentelle Beobachtungen kaum möglich sind, ist es wichtig, theoretische Vorhersagen zu treffen.² Im Folgenden wollen wir daher ganz analog zu isospin-symmetrischer Kernmaterie die Energie pro Nukleon in Neutronenmaterie durch die chirale Piondynamik vorstellen.

Wie zur Berechnung der Asymmetrieenergie muss lediglich im Medieneinschub des Nukleonpropagators eine kleine Änderung vorgenommen und eine Isospinprojektion auf das Neutron eingefügt werden:

$$\Theta(k_f - |\vec{p}|) \rightarrow \Theta(k_n - |\vec{p}|) \frac{1 - \tau_3}{2}. \quad (5.19)$$

Die Neutronendichte ist mit dem Fermiimpuls k_n definiert als $\rho_n = k_n^3/(3\pi^2)$.

Damit sind die Einzelbeiträge zur Energie pro Neutron ganz analog zu den bisherigen Verfahren zu ermitteln.

5.2.1 Einzelbeiträge

Es zeigt sich, dass die meisten Diagramme sehr einfach für Neutronenmaterie zu berechnen sind, da sie sich nur durch einen relativen Isospinfaktor von ihren bereits bekannten Ergebnissen für isospin-symmetrische Kernmaterie unterscheiden.

Kinetische Energie

Für die mittlere kinetische Energie mit relativistischen Korrekturen erhält man in Neutronenmaterie:

$$\bar{E}_{n,0}(k_n) = \frac{3k_n^2}{10M_N} - \frac{3k_n^4}{56M_N^3} + \frac{k_n^6}{48M_N^5}. \quad (5.20)$$

Ein-Pion-Austausch

Der Beitrag des Ein-Pion-Austausches (Abb. 4.4) lässt sich unmittelbar aus dem Ergebnis in isospin-symmetrischer Kernmaterie (Gl. (4.12)) ablesen:

$$E_{n,1}(k_n, r) = \frac{1}{3} \cdot E_1(k_f, r) \Big|_{k_f \rightarrow k_n}. \quad (5.21)$$

Iterierter Ein-Pion-Austausch

Auch für den iterierten Ein-Pion-Austausch (Abb. 4.5) unterscheiden sich die Ergebnisse in Neutronenmaterie nur durch Faktoren von denen in isospin-symmetrischer Kernmaterie

²Neutronensterne sind die einzigen bekannten, gebundenen Systeme aus Neutronen. Für die Bindung ist allerdings die Gravitation verantwortlich.

(Gl. (4.13-4.16)).

Für die Hartreedigramme mit zwei bzw. drei Medieneinschüben gilt:

$$E_{n,2/4}(k_n, r) = \frac{1}{6} \cdot E_{2/4}(k_f, r) \Big|_{k_f \rightarrow k_n} . \quad (5.22)$$

Entsprechend findet man für die Fockdiagramme:

$$E_{n,3/5}(k_n, r) = -\frac{1}{3} \cdot E_{3/5}(k_f, r) \Big|_{k_f \rightarrow k_n} . \quad (5.23)$$

Irreduzibler Zwei-Pion-Austausch mit bis zu zwei virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregungen

Für Neutronenmaterie ergeben Abb.4.6-4.8 den Beitrag:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{n,6}(k_n, \Lambda) = & \frac{1}{8\pi^3} \int_{2m_\pi}^{\Lambda+m_\pi} d\mu \operatorname{Im}(V_C + W_C + 2\mu^2 V_T + 2\mu^2 W_T) \left\{ 3\mu k_n - \frac{4k_n^3}{3\mu} \right. \\ & \left. + \frac{8k_n}{5\mu^3} - \frac{\mu^3}{2k_n} - 4\mu^2 \arctan \frac{2k_n}{\mu} + \frac{\mu^3}{8k_n^3} (12k_n^2 + \mu^2) \ln \left(1 + \frac{4k_n^2}{\mu^2} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (5.24)$$

In dieser Gleichung sind noch keine Kontaktterme enthalten. Diese werden aber wiederum analog zu isospin-symmetrischer Kernmaterie (Abschnitt 4.6.1) auftreten, und es gilt für den allgemeinen Beitrag des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches:

$$\bar{E}_{n,irr.2\pi}(k_n, \Lambda) = \bar{B}_{n,3}(\Lambda) \frac{k_n^3}{M_N^2} + \bar{B}_{n,5}(\Lambda) \frac{k_n^5}{M_N^4} + \bar{E}_{n,6}(k_n, \Lambda) . \quad (5.25)$$

Die Koeffizienten $\bar{B}_{n,3}(\Lambda)$ und $\bar{B}_{n,5}(\Lambda)$ kamen bereits in den Kontakttermen der Asymmetrieenergie vor.

Dreikörperbeitrag des Zwei-Pion-Austausches mit einer virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregung

Das Ergebnis des Hartreedigramms (Abb. 4.9 links) ergibt sich aus demjenigen in isospin-symmetrischer Kernmaterie (Gl. (4.19)) ergänzt durch eine zusätzlichen Faktor:

$$E_{n,7}(k_n, r) = \frac{1}{6} \cdot E_7(k_f, r) \Big|_{k_f \rightarrow k_n} . \quad (5.26)$$

Wie für die Asymmetrieenergie trägt hier neben dem gekreuzten Fockdiagramm auch das ungekreuzte bei und man erhält durch explizite Berechnung der beiden beitragenden Fockgraphen (Abb. 4.9 Mitte und links):

$$\bar{E}_{n,8}(k_n, r) = -\frac{g_A^4 m_\pi^6}{(4\pi f_\pi)^4 \Delta u_n^3} \int_0^{u_n} dx [G_{S,r}^2(x, u_n) + 2G_{T,r}^2(x, u_n)] . \quad (5.27)$$

5.2.2 Auswertung

Nimmt man alle Einzelbeiträge zusammen, so lässt sich die Zustandsgleichung für Neutronenmaterie, analog zu Gl. (4.41) bzw. zu Gl. (5.16), schreiben als:

$$\bar{E}_{n,total}(k_n, \Lambda) = B_{n,3}(\Lambda) \frac{k_n^3}{M_N^2} + B_{n,5}(\Lambda) \frac{k_n^5}{M_N^4} + \sum_{i=0}^8 \bar{E}_{n,i}(k_n, \Lambda). \quad (5.28)$$

Die Kopplungskonstanten der Kontaktterme sind die bereits in Gl. (5.16) verwendeten und, wie dort, greifen wir uns zur Auswertung die Monopolmasse Λ_0 heraus.

Aus Gl. (5.18), die die Asymmetrieenergie an der Sättigungsdichte auf den Wert von $\bar{A}(k_{f,0}) = 33.2 \text{ MeV}$ fixiert, ist der Koeffizient $B_{n,5}$ in Abhängigkeit von $B_{n,3}$ festgelegt. Wie angekündigt, wollen wir $B_{n,3}$ durch Vergleiche mit anderen Ergebnissen für Neutronenmaterie anpassen. Dazu wählen wir die Resultate aus [44], wo eine Variationsmethode mit einer dichteabhängigen M3Y-Wechselwirkung und einem nullreichweitigen Potential eingesetzt wird. Die Werte stimmen sehr gut mit denen aus [45] überein, wo das Argonne $v18$ -Potential zugrunde liegt.

Sie wurden nun für Dichten bis $\rho_n = 0.25 \text{ fm}^{-3}$ jeweils von unseren entsprechenden Werten für die Energie pro Neutron abgezogen und die Differenzen wurden (gemäß dem normalen Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz) quadriert, aufsummiert und minimiert. Man erhält damit:

$$B_{n,3}(\Lambda_0) \approx -1.02 \quad \xrightarrow{\text{Gl. (5.18)}} \quad B_{n,5}(\Lambda_0) \approx 1.27. \quad (5.29)$$

Leider ist das Ergebnis für die Zustandsgleichung von Neutronenmaterie alles andere als zufriedenstellend, wie Abb. 5.1 verdeutlicht.

Deshalb führen wir das gleiche Verfahren zur Festlegung von $B_{n,3}$ noch mit anderen Vergleichswerten aus Monte-Carlo-Simulationen [46] durch. Diese liegen systematisch unterhalb von den bisher verwendeten aus [44] und [45] und sind auch noch etwas kleiner als die aus [47], wo Teilchen-Teilchen und Loch-Loch Ringdiagramme bis in alle Ordnungen aufsummiert werden. Mit den Werten für Neutronenmaterie aus [46] bekommt man:

$$B_{n,3}(\Lambda_0) \approx -0.61 \quad \xrightarrow{\text{Gl. (5.18)}} \quad B_{n,5}(\Lambda_0) \approx -1.71. \quad (5.30)$$

Der attraktive Kontaktterm in k_f^3 ist im Vergleich zu den Werten aus Gl. (5.29) abgeschwächt. Der Beitrag in k_f^5 ist jetzt nicht mehr repulsiv sondern attraktiv. In Abb. 5.1 zeigt sich, dass diese Anpassung an [46] (schwarz durchgezogene bzw. gestrichelte Kurve) zwar etwas besser zu funktionieren scheint als die erste an Werte aus [44] (blau gestrichpunktete bzw. gepunktete Kurve), aber der Bereich und die Anzahl der Vergleichswerte ist hier auch kleiner.

Lässt man $B_{n,3}(\Lambda)$ probenhalber frei variieren, so zeigt sich, dass sogar der qualitative Kurvenverlauf äußerst stark von diesem Koeffizienten abhängt.

Nun wollen wir dennoch die Auswertung der Asymmetrieenergie mit den ermittelten Parametern $B_{n,3}$ und $B_{n,5}$ fortsetzen und abschließen. In Abb. 5.2 ist die zu den Werten in

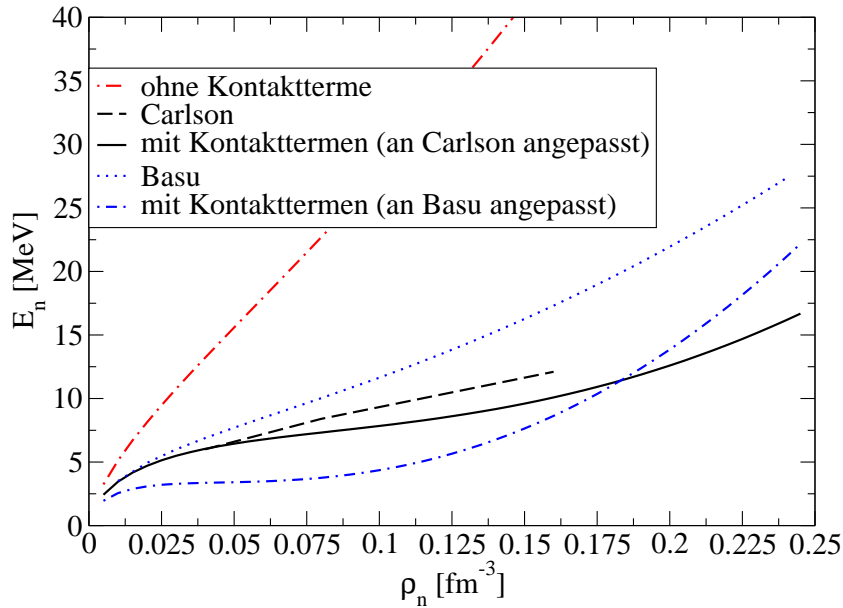


Abbildung 5.1: Energie pro Teilchen von Neutronenmaterie in Abhängigkeit von der Dichte. Die rote gestrichpunktete Kurve zeigt unser Ergebnis für die Monopolmasse Λ_0 beim Fehlen jeglicher Kontaktterme, welche aber offensichtlich benötigt werden. Die blaue gestrichpunktete Linie stellt den Verlauf mit den Kopplungskonstanten aus Gl. (5.29) dar und die gepunktete Linie zeigt explizit die zur Anpassung in Gl. (5.29) verwendeten Vergleichswerte aus [44] (Basu). Analog gibt die schwarze durchgezogene Linie die Kurve mit den Kopplungskonstanten aus Gl. (5.30) wieder und die schwarze gestrichelte Linie zeigt die zur Anpassung in Gl. (5.30) benutzten Vergleichswerte aus [46] (Carlson).

Gl. (5.29) (blau gestrichelte Kurve) bzw. in Gl. (5.30) (schwarz durchgezogene Kurve) gehörige Asymmetrieenergie in Abhängigkeit von der Dichte gezeigt. Zum Vergleich ist auch die Asymmetrieenergie gemäß [48] (grün gepunktete Kurve) eingezeichnet. Dort wurde mit Brückner-Hartree-Fock Methoden und dem Argonne $v14$ -NN-Potential gearbeitet. Die zugehörige Kurve liegt unterhalb des von uns erhaltenen Verlaufs. Allerdings verfehlt sie auch den empirischen Wert von etwa 33.2 MeV an der Sättigungsdichte. Dies gilt ebenfalls für die nicht eingezeichneten Resultate aus [47], die hervorragend mit den eingetragenen aus [48] übereinstimmen.

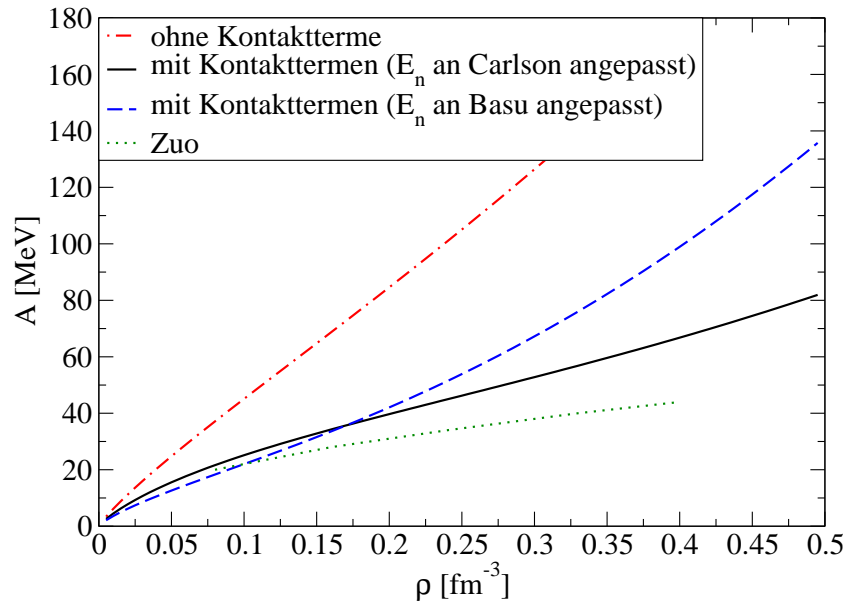


Abbildung 5.2: Asymmetrieenergie als Funktion der Dichte mit den Kopplungskonstanten aus Gl. (5.29) (blau gestrichelt, Neutronenmaterie an Basu-Werte angepasst) bzw. Gl. (5.30) (schwarz durchgezogen, Neutronenmaterie an Carlson-Werte angepasst). Zum Vergleich ist auch der Verlauf aus [48] (grün gepunktet, Zuo-Werte) dargestellt. Die rote gestrichelpunktete Kurve, die für die gewählte Monopolmasse Λ_0 auf jegliche Kontaktterme verzichtet zeigt deren Notwendigkeit auf, analog zu Abb. 5.1 für Neutronenmaterie.

Kapitel 6

Das effektive Einteilchenpotential

Da unsere bisherigen Rechnungen gerade für die Bindung von isospin-symmetrischer Kernmaterie gute Ergebnisse geliefert haben, wollen wir nun noch die Eigenschaften eines einzelnen Nukleons in Kernmaterie herausgreifen. Es bewegt sich mit seiner mittleren kinetischen Energie unter dem Einfluss eines effektiven Einteilchenpotentials, das nun explizit berechnet werden soll.

Betrachten wir ein willkürlich ausgewähltes Nukleon in isospin-symmetrischer Kernmaterie. Das zugehörige effektive Einteilchenpotential lässt sich allgemein aus der impuls- und dichteabhängigen Selbstenergie des Nukleons ableiten. Diese berechnet sich über den In-Medium-Nukleonpropagator und berücksichtigt die Wechselwirkungen der Nukleonen untereinander (bis zu einer gewissen Ordnung), wobei das Pauli-Prinzip zu beachten ist. Es gibt jedoch noch eine alternative Möglichkeit, um das mittlere Feld in Kernmaterie zu bestimmen. Diese erlaubt es, unsere bisherigen Rechnungen zur Energie pro Teilchen (vgl. Kap. 4) direkt zu nutzen. Die geschlossenen Diagramme, die dabei betrachtet wurden, resultieren ja gerade aus dem Schließen der Nukleonlinie in Selbstenergiediagrammen. Umgekehrt ist es auch möglich, durch Öffnen eines geschlossenen Diagramms an einem Medieneinschub wieder auf das Selbstenergiediagramm und damit auf das effektive Einteilchenpotential rückzuschließen. Im Folgenden wollen wir diesen Weg beschreiten.

Die Vakuumgraphen aus Kap. 4 lassen sich durch die Anzahl der Medieneinschübe charakterisieren. Ein Medieneinschub kennzeichnet gerade den Unterschied des Nukleonpropagators in Kernmaterie (hier bei der Temperatur $T = 0$) zu dem freien Nukleonpropagator (vgl. Gl. (4.5)), also die Wechselwirkung mit anderen Nukleonen. Die Anzahl der Medieneinschübe kann demzufolge als die Anzahl der an der betrachteten Wechselwirkung teilnehmenden Nukleonen interpretiert werden.¹ In diesem Sinn lässt sich die Energiedichte (hier bis in

¹Andererseits kann z.B. ein Diagramm mit drei Medieneinschüben auch als Zweikörperterm mit Pauli-geblocktem Zwischenzustand angesehen werden.

Drei-Loop-Ordnung) formal ordnen:

$$\begin{aligned} \varepsilon[d] = & \int d^3\vec{p}_1 \mathcal{K}_1 d(\vec{p}_1) + \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 \mathcal{K}_2 d(\vec{p}_1) d(\vec{p}_2) + \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3 \mathcal{K}_3 d(\vec{p}_1) d(\vec{p}_2) d(\vec{p}_3) \\ & + \int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_4 \mathcal{K}_4 d(\vec{p}_1) d(\vec{p}_2) d(\vec{p}_3) d(\vec{p}_4). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Im Folgenden bezeichnen wir stets den Betrag des räumlichen Impulses mit $p := |\vec{p}|$ (und meinen mit p also nicht den Viererimpuls).

Der Einkörperkern $\mathcal{K}_1 = 4T_{kin}(|\vec{p}_1|)$ umfasst lediglich die kinetische Energie, versehen mit einem Faktor 4, welcher die Spin- und Isospinfreiheitsgrade des Nukleons zählt. Zusammen mit relativistischen Korrekturen gilt:

$$T_{kin}(p) = \frac{p^2}{2M_N} - \frac{p^4}{8M_N^3} + \frac{p^6}{16M_N^5} + \dots \quad (6.2)$$

Die Kerne \mathcal{K}_2 und \mathcal{K}_3 sind die Zwei- und Dreikörperterme, die mit den geschlossenen Diagrammen mit zwei und drei Medieneinschüben aus Kap. 4 korrespondieren. Dort wurde auch bereits darauf hingewiesen, dass in der betrachteten Drei-Loop-Näherung die Vierkörperbeiträge, also die Graphen mit vier Medieneinschüben, rein imaginär sind. Sie sind dem Kern \mathcal{K}_4 zugeordnet, welcher proportional zu $\delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4)$ ist.

In Gl. (6.1) bezeichnen die $d(\vec{p}_j)$, $j \in \{1, \dots, 4\}$, die Zustandsdichte im Impulsraum. Setzt man dafür $d(p_j) = \Theta(k_f - p_j)/(2\pi)^3$, also die Zustandsdichte eines gefüllten Fermisees ein, so erhält man gerade die Energiedichte von Kernmaterie im Grundzustand: $\varepsilon = \rho \bar{E}(k_f)$. Die Zustandsdichte ist dabei so normiert, dass die Nukleonendichte wie üblich $\rho = 2k_f^3/(3\pi^2)$ lautet.

Soweit beschreibt Gl. (6.1) nur das Bekannte aus Kap. 4. Der Vorteil ist jedoch, dass man mit dieser allgemeinen Schreibweise der Energiedichte auch auf das effektive Einteilchenpotential zugreifen kann. Dazu muss man lediglich die Zustandsdichte etwas abändern:

$$d(p_j) = \frac{\Theta(k_f - p_j)}{(2\pi)^3} \quad \rightarrow \quad d(\vec{p}_j) = \frac{\Theta(k_f - p_j)}{(2\pi)^3} + \eta \delta^3(\vec{p} - \vec{p}_j). \quad (6.3)$$

Dem Fermisee wird so ein Testnukleon mit festem Impuls \vec{p} zugefügt, was gewissermaßen dem Aufschneiden eines Diagramms entspricht. η ist als \pm das inverse (unendliche) Volumenelement zu identifizieren und entscheidet, ob es sich um ein Teilchen (Vorzeichen + und $p > k_f$) oder um ein Loch (Vorzeichen - und $p < k_f$) handelt.

Berechnet man mit der veränderten Zustandsdichte aus Gl. (6.3) nun das Energiedichtefunktional aus Gl. (6.1), so ergibt sich:²

$$\varepsilon = \rho \bar{E}(k_f) + 4 \eta [T_{kin}(p) + U(p, k_f) + iW(p, k_f)]. \quad (6.4)$$

²Die Λ -Abhängigkeit ist hier nicht explizit mit angeschrieben.

Der erste Term der rechten Seite ist die bekannte Grundzustandsenergiedichte (vgl. Kap. 4). Der zweite Summand resultiert aus der Einführung des Testnukleons, wobei mit dem Faktor 4 wieder die möglichen Spin- und Isospineinstellungen berücksichtigt sind. Gemäß der Einteilung der Wechselwirkungskerne in Gl. (6.1), lassen sich der Real- und Imaginärteil des Einteilchenpotentials in Zwei-, Drei- und Vierkörperbeiträge (jeweils in den Indizes unterschieden) zerlegen:

$$\begin{aligned} U(p, k_f) &= U_2(p, k_f) + U_3(p, k_f), \\ W(p, k_f) &= W_2(p, k_f) + W_3(p, k_f) + W_4(p, k_f). \end{aligned}$$

Mit Gl. (6.3) und Gl. (6.4) ist direkt eine Konstruktionsvorschrift für das effektive Einteilchenpotential gegeben: Wir setzen die Energiedichte für die gleichen Diagramme wie in Kap. 4 mit den Feynmanregeln in exakt gleicher Weise an. Die einzige Veränderung ist die Ersetzung von Gl. (6.3) im Medieneinschub des Nukleonpropagators aus Gl. (4.5). Die Berechnungen bereiten keine neuen Schwierigkeiten. Aus dem Ergebnis jedes Einzelbeitrags filtern wir schließlich den Term linear in η heraus (das ‐aufgeschnittene‐ Diagramm), dividieren diesen durch $4 \cdot \eta$ und erhalten den Beitrag des jeweiligen Diagramms zum effektiven Einteilchenpotential.

Natürlich kann man, ausgehend von den Beiträgen zum effektiven Einteilchenpotential, durch Integration über eine Fermikugel vom Radius k_f (also durch Schließen der Diagramme) wieder direkt auf die Energie pro Teilchen (in gleicher Ordnung) zurückgreifen:

$$\bar{E}(k_f) = \frac{3}{k_f^3} \int_0^{k_f} dp p^2 \left[T_{kin}(p) + \frac{1}{2}U_2(p, k_f) + \frac{1}{3}U_3(p, k_f) \right].^3 \quad (6.5)$$

Die Imaginärteile der Beiträge zum effektiven Einteilchenpotential dürfen hier keine Rolle spielen, da die Energie pro Teilchen reell sein muss. Es gilt daher:

$$\frac{3}{k_f^3} \int_0^{k_f} dp p^2 \left[\frac{1}{2}W_2(p, k_f) + \frac{1}{3}W_3(p, k_f) + \frac{1}{4}W_4(p, k_f) \right] = 0. \quad (6.6)$$

Diese beiden Gleichungen stellen einen sehr guten Test der Rechnungen dar. An der Fermikante, $p = k_f$, gibt es noch einen weiteren Zusammenhang zwischen der Energie pro Teilchen und dem effektiven Einteilchenpotential: Das Hugenholtz-Van-Hove Theorem. Die Fermienergie, also die volle Einteilchenenergie an der Fermikante, ist gleich dem chemischen Potential bei der Temperatur $T = 0$. Das chemische Potential ergibt sich über allgemeine, thermodynamische Beziehungen als Ableitung der Energiedichte $\rho \bar{E}(k_f)$ nach der Dichte ρ . Es gilt also:

$$T_{kin}(k_f) + U(k_f, k_f) = \bar{E}(k_f) + \frac{k_f}{3} \frac{\partial \bar{E}(k_f)}{\partial k_f} \quad ; \quad W(k_f, k_f) = 0. \quad (6.7)$$

³Die Faktoren 1/2 und 1/3 berücksichtigen kombinatorische Faktoren. Aus dem Schließen der Nukleonlinie eines Selbstenergiendiagramms resultieren beispielsweise drei topologisch äquivalente Vakuumdiagramme mit drei Medieneinschüben.

Am Sättigungspunkt von Kernmaterie, $k_f = k_{f,0}$, verschwindet die Ableitung und Gl. (6.7) vereinfacht sich zu:

$$T_{kin}(k_{f,0}) + U(k_{f,0}, k_{f,0}) = \bar{E}(k_{f,0}). \quad (6.8)$$

Dieser Zusammenhang ist etwas einfacher nachzuprüfen als Gl. (6.5) und wurde als expliziter Test unserer Rechnungen für das effektive Einteilchenpotential benutzt.⁴ Im folgenden Abschnitt stellen wir unsere Ergebnisse für dieses vor.

6.1 Realteile der einzelnen Beiträge

Um die Einzelbeiträge mit dem jeweiligen Term der Energie pro Teilchen in Kap. 4 in Verbindung bringen zu können, verwenden wir die gleichen Indizes wie in früheren Kapiteln. Auch die dortigen Abkürzungen, wie z.B. $u := k_f/m_\pi$, setzen wir nach wie vor ein. Zusätzlich bietet sich die Definition $x := p/m_\pi$ an. Die Abhängigkeit von Λ kennzeichnen wir nicht mehr explizit im Argument der einzelnen Terme.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die folgenden Formeln sich im Zweifelsfall auf einen Lochzustand beziehen, also auf ein aus dem Fermisee entferntes Teilchen mit dem Impuls $0 \leq p \leq k_f$.

6.1.1 Ein-Pion-Austausch

Das Fockdiagramm mit zwei Medieneinschüben (in Abb. 4.4 rechts) liefert folgenden Zweikörperanteil zum Einteilchenpotential:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(k_f, x) = & \frac{3g_A^2 m_\pi^3}{(4\pi f_\pi)^2} \left\{ \arctan(u+x) + \arctan(u-x) \right. \\ & + \frac{1-3r^2}{2r^3} [\arctan(r(u+x)) + \arctan(r(u-x))] \\ & - \frac{1+u^2-x^2}{4x} \ln \frac{1+(u+x)^2}{1+(u-x)^2} - \frac{1-2r^2-r^4(u^2-x^2)}{4r^4x} \ln \frac{1+r^2(u+x)^2}{1+r^2(u-x)^2} \\ & + \frac{m_\pi^2}{16M_N^2} \left[\frac{2(1-r^2)u}{r^4(1+2r^2(u^2+x^2)+r^4(u^2-x^2)^2)} \cdot [3-r^2(2-5u^2-7x^2) \right. \\ & \quad \left. - 4r^4(x^2(1-x^2)+u^2(1+x^2))-2r^6(u^2-x^2)^2] \right. \\ & \quad \left. - 2(1+4x^2)[\arctan(u+x) + \arctan(u-x)] \right. \\ & \quad \left. - \frac{3-r^2(5-4(1-3r^2)x^2)}{r^5} [\arctan(r(u+x)) + \arctan(r(u-x))] \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{u^4}{x} + 2u^2x - 3x^3 \right) \cdot \left(\ln \frac{1+(u+x)^2}{1+(u-x)^2} - \ln \frac{1+r^2(u+x)^2}{1+r^2(u-x)^2} \right) \right] \left. \right\}. \quad (6.9) \end{aligned}$$

⁴Ein Vorteil von Gl. (6.7) und Gl. (6.8) ist ferner, dass sie auch für jeden einzelnen Beitrag als Test herangezogen werden können.

6.1.2 Iterierter Ein-Pion-Austausch

Schneidet man die geschlossenen Vakuondiagramme in Abb. 4.5 an einem Medieneinschub auf, so bekommt man, entsprechend der Anzahl der Medieneinschübe, Zwei- bzw. Dreikörperbeiträge zum effektiven Einteilchenpotential.

Das Hartreediagramm mit zwei Medieneinschüben (in Abb. 4.5 links) liefert folgenden Beitrag:

$$\begin{aligned}
\bar{U}_2(k_f, x) = & \frac{g_A^4 M_N m_\pi^4}{(4\pi)^3 f_\pi^4} \left\{ \frac{(4u^3 + 6u^2x - 2x^3 + 3x)(1 + r^2) + 6x}{2(1 - r^2)x} [\arctan(u + x) \right. \\
& - \arctan(r(u + x))] \\
& - \frac{(4u^3 - 6u^2x + 2x^3 - 3x)(1 + r^2) - 6x}{2(1 - r^2)x} [\arctan(u - x) - \arctan(r(u - x))] \\
& - \frac{7 + r^2 + (15 + 9r^2)(u^2 - x^2)}{8(1 - r^2)x} \ln \frac{1 + (u + x)^2}{1 + (u - x)^2} \\
& + \frac{1 - 7r^2 + 35r^4(1 + r^2) + 3(u^2 - x^2)r^2(-1 + 15r^2 + 45r^4 + 5r^6)}{64r^5(1 - r^2)x} \\
& \cdot \ln \frac{1 + r^2(u + x)^2}{1 + r^2(u - x)^2} - \frac{3(1 + r) - 10r^2 + 78r^3 - 25r^4 + 15r^5}{16r^3(1 + r)} u \\
& \left. + \frac{(1 - r^2)^2(1 - r^2x(u - x))}{16r^5x(1 + r^2(u - x)^2)} - \frac{(1 - r^2)^2(1 + r^2x(u + x))}{16r^5x(1 + r^2(u + x)^2)} \right\}. \tag{6.10}
\end{aligned}$$

Analog entspricht dem Fockdiagramm mit zwei Medieneinschüben (in Abb. 4.5 zweites von links):⁵

$$\begin{aligned}
\bar{U}_3(k_f, x) = & \frac{g_A^4 M_N m_\pi^4}{(4\pi)^3 f_\pi^4} \left\{ \left[\int_0^{\frac{u-x}{2}} d\xi \, 2 + \int_{\frac{u-x}{2}}^{\frac{u+x}{2}} d\xi \frac{u^2 - (2\xi - x)^2}{4x\xi} \right] \frac{6\xi}{1 + 2\xi^2} \right. \\
& \cdot \left[\frac{1 + 8\xi^2 + 8\xi^4}{2(1 + 2\xi^2)} \arctan \xi - \frac{(1 - r^2)^2(1 + 4\xi^2)}{2(1 + 2\xi^2)(1 + r^2(1 + 4\xi^2))^2} \arctan(2\xi) \right. \\
& + \xi(1 - r^2) \left(\frac{1}{1 + r^2(1 + 4\xi^2)} + \frac{1 + r^2(1 + 4\xi^2)}{(1 + r^2(1 + 4\xi^2))^2 - 4r^2} \right) \\
& + \left(\frac{(1 - r^2)^2}{4r^2(1 + 2r^2\xi^2)^3} + \frac{1 + 2r^4\xi^2}{2(1 + 2r^2\xi^2)^2} \right) (\arctan(2r\xi) - \arctan(r\xi)) \\
& + (1 + 2\xi^2) \arctan(r\xi) - \frac{1 + r^4(1 + 4\xi^2)}{(1 + r^2(1 + 4\xi^2))^2} \arctan(2r\xi) \\
& + \left(1 + 2\xi^2 - \frac{1 + r^4(1 + 4\xi^2)}{(1 + r^2(1 + 4\xi^2))^2} \right) \left(\arctan \frac{4r^2\xi}{1 - r^2(1 - 4\xi^2)} \right. \\
& \left. - \arctan \frac{2r\xi}{1 + r} - \arctan \frac{2r\xi}{1 - r} \right) \\
& + \frac{\xi}{r}(1 - r^2) \left(\frac{4r^2\xi^2(r^2 - 2) + 5r^2 - 9}{16(1 + r^2\xi^2)^2} - \frac{1 + r^2\xi^2(1 + r^2)}{(1 + 2r^2\xi^2)^2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{1 + r^2(1 + 4\xi^2)} - \frac{2r^2}{(1 + r^2(1 + 4\xi^2))^2 - 4r^2} \right) \right] \Bigg\}. \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Das Hartreediagramm mit drei Medieneinschüben (zweites von rechts in Abb. 4.5) korres-

⁵Durch den Ansatz über die Feynmanregeln erhält man die Form

$$\bar{U}_3(k_f, x) = \int d^3\vec{p}_1 \Theta(k_f - |\vec{p}_1|) f(\xi),$$

wobei $\vec{\xi} = \frac{\vec{p}_1}{2m_\pi} - \frac{\vec{x}}{2}$, $\xi := |\vec{\xi}|$ und $x := |\vec{x}|$. Mit $d^3\vec{p}_1 \Theta(k_f - |\vec{p}_1|) = d^3\vec{\xi} 8m_\pi^3 \Theta(\frac{u}{2} - |\vec{\xi} + \frac{\vec{x}}{2}|)$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
\bar{U}_3(k_f, x) &= \int d^3\vec{\xi} 8m_\pi^3 \Theta\left(\frac{u}{2} - \left|\vec{\xi} + \frac{\vec{x}}{2}\right|\right) f(\xi) \\
&= 2\pi \int_{-1}^1 d\gamma \int_0^{-\frac{x}{2}\gamma + \sqrt{\frac{x^2}{4}(\gamma^2 - 1) + \frac{u^2}{4}}} d\xi \xi^2 f(\xi) \\
&= 2\pi \left(\int_0^{\frac{u-x}{2}} d\xi \int_{-1}^1 d\gamma + \int_{\frac{u-x}{2}}^{\frac{u+x}{2}} d\xi \int_{\frac{x^2 - u^2 + 4\xi^2}{4\xi x}}^1 d\gamma \right) \xi^2 f(\xi).
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt beinhaltet lediglich das Umdrehen der Integrationsreihenfolge. Die Ausführung der γ -Integrationen in den Doppelintegralen ist nun trivial und es folgt die in Gl. (6.11) gezeigte Darstellung.

pondiert mit folgendem Dreikörperbeitrag zum Potential:

$$\begin{aligned}
\bar{U}_4(k_f, x) = & \frac{6g_A^4 M_N m_\pi^4}{(4\pi f_\pi)^4} \int_{-1}^1 dy \left\{ \left[2uxy + (u^2 - x^2 y^2) \ln \frac{u+xy}{u-xy} \right] \right. \\
& \cdot \left[\frac{1+r^2}{1-r^2} \left(\ln(1+r^2 s^2) - \ln(1+s^2) \right) + \frac{s^2}{6(1+s^2)(1+r^2 s^2)^3} \left(3(1+r^2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cdot (2 + (1+5r^2)s^2) + r^2(3+25r^2+7r^4+r^6)s^4 + r^4(1+10r^2+r^4)s^6 \right) \right] \\
& + \int_{-xy}^{s-xy} d\xi \frac{(1-r^2)^4 (xy+\xi)^5 \left[2u\xi + (u^2 - \xi^2) \ln \frac{u+\xi}{u-\xi} \right]}{[1+(xy+\xi)^2]^2 [1+r^2(xy+\xi)^2]^4} \\
& + \int_0^u d\xi \frac{2\xi^2}{x} \ln \left| \frac{x+\xi y}{x-\xi y} \right| \\
& \cdot \left[\frac{(1+r^2)}{1-r^2} \left(\ln(1+r^2 \sigma^2) - \ln(1+\sigma^2) \right) + \frac{\sigma^2}{6(1+\sigma^2)(1+r^2 \sigma^2)^3} \left(3(1+r^2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cdot (2 + (1+5r^2)\sigma^2) + r^2(3+25r^2+7r^4+r^6)\sigma^4 + r^4(1+10r^2+r^4)\sigma^6 \right) \right] \left. \right\}, \tag{6.12}
\end{aligned}$$

wobei weiterhin die Definitionen $s := xy + \sqrt{u^2 - x^2 + x^2 y^2}$ und $\sigma := \xi y + \sqrt{u^2 - \xi^2 + \xi^2 y^2}$ gelten.

Dem Fockdiagramm mit drei Medieneinschüben (in Abb. 4.5 rechts) entspricht der Term

$$\begin{aligned}
\bar{U}_5(k_f, x) = & \frac{3g_A^4 M_N m_\pi^4}{(4\pi f_\pi)^4} \left\{ \frac{G_r^2(x, u)}{8x^2} + \int_0^u d\xi G_r(\xi, u) \left[\frac{(1-r^2)(1+r^2(x^2 - \xi^2))}{(1+r^2(\xi-x)^2)(1+r^2(\xi+x)^2)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1-\xi^2+x^2}{4x\xi} \left(\ln \frac{1+r^2(\xi+x)^2}{1+r^2(\xi-x)^2} - \ln \frac{1+(\xi+x)^2}{1+(\xi-x)^2} \right) \right] \right. \\
& - \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 dz \frac{yz\Theta(y^2+z^2-1)}{|yz|\sqrt{y^2+z^2-1}} \left[\frac{(1-r^2)s^2}{1+r^2s^2} - \ln(1+s^2) + \ln(1+r^2s^2) \right] \\
& \cdot \left[\frac{(1-r^2)t^2}{1+r^2t^2} - \ln(1+t^2) + \ln(1+r^2t^2) \right] \\
& - \int_0^u d\xi \frac{\xi^2}{x} \int_{-1}^1 dy \left[\frac{(1-r^2)\sigma^2}{1+r^2\sigma^2} - \ln(1+\sigma^2) + \ln(1+r^2\sigma^2) \right] \\
& \left[\frac{-4xy\xi r^2(1-r^2)(1+r^2(x^2 - \xi^2))}{A^2(A^2 + 4y^2\xi^2 r^2)} + \frac{1}{B} \ln \frac{|xB + (x^2 - \xi^2 - 1)y\xi|}{|xB - (x^2 - \xi^2 - 1)y\xi|} \right. \\
& \left. - \frac{r^2 A^2 + (1-r^2)[1+r^2(x^2 - 2y^2\xi^2 + \xi^2)]}{A^3} \ln \frac{|xA + ((x^2 - \xi^2)r^2 - 1)y\xi|}{|xA - ((x^2 - \xi^2)r^2 - 1)y\xi|} \right] \left. \right\}, \tag{6.13}
\end{aligned}$$

mit $A := \sqrt{[1 + r^2(x^2 - \xi^2)]^2 + 4r^2\xi^2(1 - y^2)}$ und $B := A(r = 1)$. Die Funktion G_r wurde bereits in Gl. (4.17) definiert.

6.1.3 Irreduzibler Zwei-Pion-Austausch mit bis zu zwei virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregungen

Der Beitrag des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches zur Energie pro Teilchen, dargestellt in Abb. 4.6-4.8, korrespondiert mit einem Zweikörperbeitrag zum effektiven Einteilchenpotential von:

$$\begin{aligned} \bar{U}_6(k_f, p) = & \frac{1}{2\pi^3} \int_{2m_\pi}^{\Lambda+m_\pi} d\mu \operatorname{Im}(V_C + 3W_C + 2\mu^2 V_T + 6\mu^2 W_T) \left\{ \mu k_f + \frac{2k_f^3}{15\mu^3} (3k_f^2 + 5p^2) \right. \\ & - \frac{2k_f^3}{3\mu} - \mu^2 \arctan \frac{k_f + p}{\mu} - \mu^2 \arctan \frac{k_f - p}{\mu} \\ & \left. + \frac{\mu}{4p} (\mu^2 + k_f^2 - p^2) \ln \frac{\mu^2 + (k_f + p)^2}{\mu^2 + (k_f - p)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Dieser Term wurde wieder über die Dispersionsdarstellung der T-Matrix der Nukleon-Nukleon-Streuung abgeleitet.

Zu betonen ist, dass hier, in Einklang mit Gl. (4.38), zusätzliche Kontaktterme ins Spiel kommen können, so dass allgemein gilt:

$$\bar{U}_{irr.2\pi}(k_f, p) = 2\bar{B}_3(\Lambda) \frac{k_f^3}{M_N^2} + \bar{B}_5(\Lambda) \frac{k_f^3}{3M_N^4} (3k_f^2 + 5p^2) + \bar{U}_6(k_f, p). \quad (6.15)$$

6.1.4 Dreikörperterme des Zwei-Pion-Austausches mit einer virtuellen $\Delta(1232)$ -Anregung

Die Dreikörperbeiträge zum mittleren Feld stehen in Verbindung mit den Feynmandiagrammen in Abb. 4.9, die die zugehörige Energie pro Teilchen beschreiben. Es ergibt sich

für das Hartreediagramm (in Abb. 4.9 links):

$$\begin{aligned}
\bar{U}_7(k_f, x) = & \frac{g_A^4 m_\pi^6}{(2\pi f_\pi)^4 \Delta} \left\{ \frac{u^2}{12(1+4r^2u^2)r^2[1+2r^2(u^2+x^2)+r^4(u-x)^2(u+x)^2]^2} \right. \\
& \cdot \left(3r^8(3+r^2)(1+3r^2)u^{10} - r^6(-35+10r^2-179r^4+24r^2x^2+96r^4x^2 \right. \\
& + 72r^6x^2)u^8 + r^4(13-62r^2+385r^4-5r^2x^2+70r^4x^2-305r^6x^2 \\
& + 18r^4x^4+108r^6x^4+162r^8x^4)u^6 - r^2(19+22r^2-305r^4+50r^2x^2 \\
& + 20r^4x^2-214r^6x^2+15r^4x^4+78r^6x^4+27r^8x^4+48r^8x^6+144r^{10}x^6)u^4 \\
& + 3(1+r^2x^2)^2(-2+34r^4-3r^2x^2+2r^4x^2+17r^6x^2-r^4x^4+2r^6x^4 \\
& \left. \left. + 15r^8x^4)u^2 + 12r^2(1+r^2x^2)^4 \right) \right. \\
& + \frac{(5+3r^2)u^3}{1-r^2} [\arctan(u+x) + \arctan(u-x) + \arctan(2u)] \\
& + \frac{(1-5r^2(3+9r^2+r^4))u^3}{8r^3(1-r^2)} [\arctan(r(u+x)) + \arctan(r(u-x)) \\
& + \arctan(2ur)] + \frac{1+3(3+r^2)u^2}{4(1-r^2)} [\ln(1+4r^2u^2) - \ln(1+4u^2)] \\
& \left. + \frac{(3+r^2+2(1+r^2)(u^2-x^2))u^3}{2(1-r^2)x} \left[\ln \frac{1+r^2(u+x)^2}{1+r^2(u-x)^2} - \ln \frac{1+(u+x)^2}{1+(u-x)^2} \right] \right\}. \tag{6.16}
\end{aligned}$$

Wie für die Energie pro Teilchen in isospin-symmetrischer Kernmaterie liefert auch hier nur das gekreuzte Fockdiagramm (in Abb. 4.9 Mitte) einen nicht-verschwindenden Beitrag:

$$\begin{aligned}
\bar{U}_8(k_f, x) = & -\frac{g_A^4 m_\pi^6}{4\Delta(4\pi f_\pi)^4 x^2} \left\{ 2G_{S,r}^2(x, u) + G_{T,r}^2(x, u) \right. \\
& \left. + 2 \int_0^u d\xi \left(2G_{S,r}(\xi, u) \frac{\partial G_{S,r}(\xi, x)}{\partial x} + G_{T,r}(\xi, u) \frac{\partial G_{T,r}(\xi, x)}{\partial x} \right) \right\}. \tag{6.17}
\end{aligned}$$

Die Funktionen $G_{I,r}$, $I \in \{S, R\}$, sind bereits aus Kap. 4 bekannt.

6.2 Der Imaginärteil des Einteilchenpotentials

Bis in Drei-Loop-Ordnung trägt nur der iterierte Ein-Pion-Austausch zum Imaginärteil des mittleren Kernpotentials bei. Beschränkt man sich, wie in Abschnitt 6.1, auf ein Testloch, d.h. $0 \leq p \leq k_f$, so beschreibt der Imaginärteil anschaulich mit $\tau_{Loch} = [2W(k_f, p)]^{-1}$ die endliche Lebensdauer des Lochzustandes im Fermisee. Der zugehörige physikalische

Prozess ist die Energieumverteilung auf einen Lochzustand näher an der Fermikante mit zusätzlicher Teilchen-Loch-Anregung.

Die Berechnung der Einzelbeiträge verläuft ganz analog zu den Realteilen. Wir gehen hier jedoch nicht näher auf den Imaginärteil des Einteilchenpotentials ein, sondern konzentrieren uns auf den Realteil, aus dem noch weitere Einteilcheneigenschaften, wie z.B. die effektive Masse ermittelt werden können.

6.3 Auswertung des Realteils des effektiven Einteilchenpotentials

Setzt man den gesamten Realteil aus allen, soeben besprochenen Beiträgen zusammen, so treten - ganz analog zu isospin-symmetrischer Kernmaterie in Kap. 4 - wieder allgemeine Kontaktterme mit der gleichen k_f -Abhängigkeit wie beim irreduziblen Zwei-Pion-Austausch auf:

$$\bar{U}_{total}(k_f, x, \Lambda) = 2B_3(\Lambda) \frac{k_f^3}{M_N^2} + B_5(\Lambda) \frac{k_f^3}{3M_N^4} (3k_f^2 + 5p^2) + \sum_{i=1}^8 \bar{U}_i(k_f, x, \Lambda). \quad (6.18)$$

Die Koeffizienten sind, gemäß dem Hugenholtz-van-Hove Theorem, konsistent mit der allgemeinen Form der Energie pro Teilchen in Gl. (4.41). In Abschnitt 4.6.2 wurden die Kopplungskonstanten $B_3(\Lambda)$ und $B_5(\Lambda)$ bereits so bestimmt, dass die Zustandsgleichung von isospin-symmetrischer Kernmaterie unter Zuhilfenahme der zugehörigen Kontaktterme für jedes Λ reproduziert wird. Dementsprechend können wir auch hier ein beliebiges Λ auswählen. Wie bei den Betrachtungen der Asymmetrieenergie und der reinen Neutronenmaterie ist sicher die Wahl, bei der die Kontaktterme gerade verschwinden am einfachsten. Wir werten unsere Rechnungen also im Folgenden für den Wert $\Lambda_0 = 1.15 \text{ GeV}$ aus. In diesem Fall gilt einfach:

$$\bar{U}_{total}(k_f, x, \Lambda_0) = \sum_{i=1}^8 \bar{U}_i(k_f, x, \Lambda_0). \quad (6.19)$$

Abb.6.1 zeigt zunächst das mittlere Feld in Kernmaterie für ein ruhendes Nukleon, d.h. $p = 0$. Das Minimum liegt mit $\rho_{min} \approx 0.163 \text{ fm}^{-3}$ ($k_{f,min} \approx 265 \text{ MeV}$) außerordentlich nah an der Sättigungsdichte von Kernmaterie, $\rho_0 = 0.158 \text{ fm}^{-3}$ ($k_{f,0} = 262 \text{ MeV}$).

Zu der Potentialtiefe von $\bar{U}_{total,min}(k_{f,min}, 0, \Lambda_0) \approx -64.6 \text{ MeV}$ tragen die chiralen Ordnungen wie folgt bei:

$$\bar{U}_{total,min}(k_{f,min}, 0, \Lambda_0) \approx (26.95 - 108.63 + 17.1) \text{ MeV}.$$

$$\begin{array}{ccc} k_f^3 & k_f^4 & k_f^5 \end{array}$$

Eine noch detailliertere Aufschlüsselung in die Einzelbeiträge ergibt:

$$\bar{U}_{total,min}(k_{f,min}, 0, \Lambda_0) \approx (26.95 - 151.28 - 19.76 + 65.23 - 2.82 + 2.59 + 22.80 - 8.27) \text{ MeV}.$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1\pi & \text{H2} & \text{F2} & \text{H3} & \text{F3} & \text{irr.2}\pi & \text{3N-H} & \text{3N-F} \end{array}$$

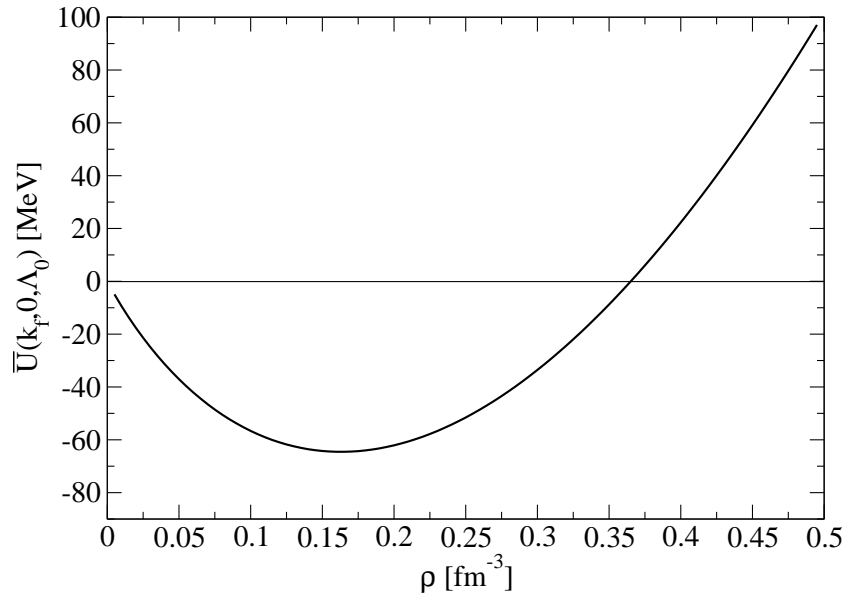


Abbildung 6.1: Der Realteil $\bar{U}_{total}(k_f, 0, \Lambda_0)$ des effektiven Einteilchenpotentials für ein ruhendes Nukleon in Abhängigkeit von der Nukleonendichte.

Im Vergleich zu unserem Ergebnis von $\bar{U}_{total,min}(k_{f,min}, 0, \Lambda_0) \approx -64.6$ MeV ergeben relativistische Dirac-Brückner Kalkulationen mit dem Bonn A-NN-Potential (siehe [49]) eine Potentialtiefe von ca. -80 MeV. Andere Berechnungen mit Hilfe der Paris NN-Wechselwirkung (vgl. [50]) liefern um die -55 MeV, was auch ungefähr der in Schalenmodellrechnungen verwendeten Potentialtiefe (siehe [3]) entspricht.

Nun wollen wir noch die Impulsabhängigkeit des effektiven Einteilchenpotentials untersuchen. Dazu setzen wir den Fermiimpuls auf $k_{f,0} = 262$ MeV fest - wir betrachten also die Situation von $\bar{U}_{total}(k_{f,0}, p, \Lambda_0)$ bei Sättigungsdichte, $\rho_0 = 0.158$ fm⁻³. Das Testnukleon sei aus dem Fermisee mit dem Impuls $0 \leq p \leq k_{f,0}$ entnommen. Es handelt sich also um ein Testloch, das in Abhängigkeit von seinem Impuls p (äquivalent zu $x = p/m_\pi$) das in Abb. 6.2 gezeigte mittlere Feld spürt. Dieses startet für $x = 0$ bei $\bar{U}_{total}(k_{f,0}, 0, \Lambda_0) \approx -64.5$ MeV, was konsistent mit dem entsprechenden Wert in Abb. 6.1 ist. Dann steigt es stark abflachend an, kehrt für $p \rightarrow 262$ MeV wieder leicht um und endet mit $\bar{U}_{total}(k_{f,0}, 262 \text{ MeV}, \Lambda_0) \approx -52.5$ MeV.

Die Gesamtkurve, die sowohl das effektive Einteilchenpotential als auch die kinetische Energie umfasst, wächst monoton mit dem Nukleonimpuls an und erreicht an der Fermikante, $p = 262$ MeV, den Wert -16.8 MeV. Hier kann man unmittelbar sehen, dass das Hugenholtz-van-Hove Theorem, Gl. (6.8), erfüllt ist.

Natürlich könnte man auch die stetige Fortsetzung von $\bar{U}_{total}(k_{f,0}, p, \Lambda_0)$ für $p > k_{f,0}$ noch betrachten. Wir unterlassen dies jedoch, da der Nukleonimpuls p dann schon so groß ist,

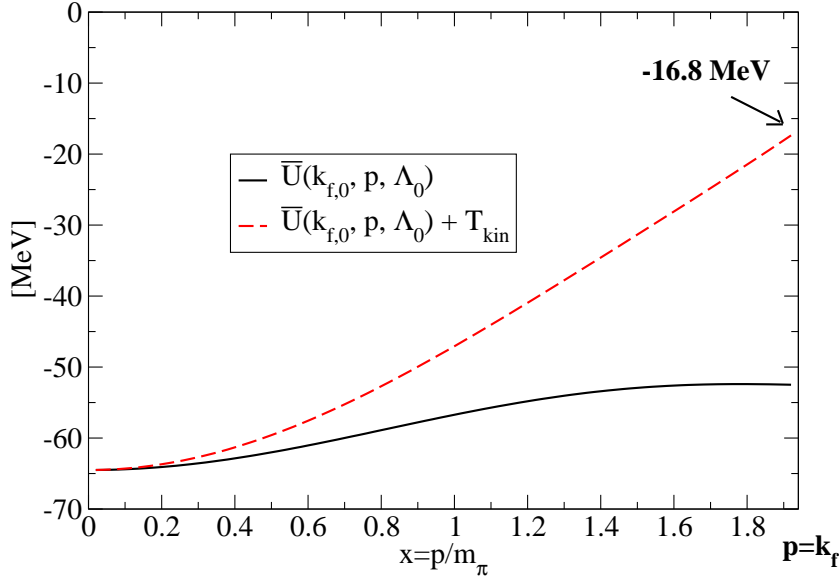


Abbildung 6.2: Der Realteil $\bar{U}_{total}(k_{f,0}, p, \Lambda_0)$ des effektiven Einteilchenpotentials bei der Sättigungsdichte $\rho_0 = 0.158 \text{ fm}^{-3}$ ($k_{f,0} = 262 \text{ MeV}$) als Funktion des Nukleonenimpulses, $0 \leq p \leq k_f$ (durchgezogene Linie). Es gilt $x = p/m_\pi$. Die gestrichelte Linie beinhaltet zusätzlich die kinetische Energie aus Gl. (6.2).

dass die Gültigkeit der chiralen Störungstheorie bezweifelt werden muss.⁶

6.4 Die effektive Nukleonmasse

Über das effektive Einteilchenpotential kann man auf eine weitere Größe schließen, nämlich auf die effektive Nukleonmasse. Sie ist maßgeblich bestimmt durch die Steigung des Realteils des Einteilchenpotentials (bei Sättigungsdichte) in Abhängigkeit vom Impuls:

$$\frac{1}{M_N^*(p)} = \frac{1}{p} \frac{\partial [T_{kin}(p) + \bar{U}_{total}(k_{f,0}, p, \Lambda)]}{\partial p} \quad (6.20)$$

$$= \frac{1}{M_N} \left[1 - \frac{p^2}{2M_N^2} + \frac{3p^4}{8M_N^5} + \frac{M_N}{p} \frac{\partial \bar{U}_{total}(k_{f,0}, p, \Lambda)}{\partial p} \right]. \quad (6.21)$$

In der zweiten Zeile wurde Gl. (6.2) für die kinetische Energie eingesetzt.

Bei niedrigen, aber endlichen Temperaturen sind die effektiven Einteilchen-Eigenschaften an der Fermikante bestimmend für das gesamte Verhalten der Kernmaterie. Wertet man

⁶Auch einige der Integrale in Abschnitt 6.1 sind, wie erwähnt, auf $0 \leq p \leq k_f$ ausgelegt und müssten für $p > k_f$ teilweise modifiziert werden.

demzufolge Gl. (6.20) wieder für Λ_0 an der Fermikante, $p = 262$ MeV, aus, so erhält man dort:⁷

$$M_N^*(k_{f,0}) \approx 1.07M_N. \quad (6.22)$$

Dieser Wert ist zu groß. Anderen Rechnungen zufolge würde man eine gegenüber der freien Nukleonmasse M_N reduzierte effektive Masse erwarten: Hartree-Fock-Berechnungen mit einer M3Y-Wechselwirkungen (vgl. [51]) ergeben $M_N^*(k_{f,0}) \approx (0.64 \dots 0.7)M_N$; eine Analyse von experimentellen Daten im Rahmen von nichtrelativistischen Schalen- bzw. optischen Modellen (siehe [52]) liefert $M_N^*(k_{f,0}) \approx (0.7 \dots 0.8)M_N$.

Das Problem unserer Rechnung ist, dass das effektive Einteilchenpotential für Impulse nahe der Fermikante wieder leicht abfällt (vgl. Abb. 6.2). Höchstwahrscheinlich könnte die Einführung zusätzlicher kleiner und impulsabhängiger Kontaktterme Abhilfe schaffen durch die Parametrisierung von noch vernachlässigter, kurzreichweitiger Dynamik außerhalb der chiralen Störungstheorie. Gemäß dem Hugenholtz-van-Hove Theorem müssten diese dann auch in isospin-symmetrischer Kernmaterie einbezogen werden.

Außerdem möchten wir noch darauf hinweisen, dass die empirischen Werte selbst mit Unsicherheiten behaftet sind und es möglicherweise bereits genügt, unsere Rechnungen an leicht verschobene Werte anzupassen. Da die Einzelbeiträge einigermaßen sensibel darauf reagieren, könnte diese kleine Veränderung evtl. schon das schwache "Umkehren" des Potentials verhindern. Gerade eine kleine Änderung des Parameters $B_5(\Lambda)$, welcher einer p^2 -abhängigen Kontaktwechselwirkung zugeordnet ist, kann schon entscheidend sein. Der unbefriedigende Wert der effektiven Masse muss also noch keinesfalls ein Versagen unserer Überlegungen bedeuten.

⁷Die partielle Ableitung des effektiven Einteilchen-Potentials wurde zur Abschätzung an der Fermikante durch einen Differenzenquotienten genähert.

Kapitel 7

Chirales Kondensat

In Abschnitt 2.4 wurde das chirale Kondensat als Maß für die spontane Brechung der chiralen Symmetrie vorgestellt und für einen Großteil der Nukleonmasse verantwortlich gemacht (vgl. Gl. (2.25)).

Wie angekündigt, wollen wir nun den Beitrag der Ein-Pion- und Zwei-Pion-Austauschterme zur Abhängigkeit des chiralen Kondensats von der Nukleonendichte näher untersuchen. Die diskutierte Berechnung der Energie pro Teilchen in isospin-symmetrischer Kernmaterie bietet uns dazu eine einfache Möglichkeit, denn mit Gl. (2.24) ist bereits der folgende Zusammenhang gegeben (vgl. [53]):

$$\frac{\langle \bar{q}q \rangle_\rho}{\langle \bar{q}q \rangle_0} = \frac{\langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_\rho}{\langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_0} = 1 - \frac{\rho}{2m_\pi f_\pi^2} \frac{d(M_N + \bar{E}(k_f))}{dm_\pi} = 1 - \frac{\rho}{2m_\pi f_\pi^2} \left(\frac{2\sigma_N}{m_\pi} + \frac{dE(k_f)}{dm_\pi} \right). \quad (7.1)$$

Im letzten Teil der Gleichung wurde die Definition des sogenannten σ_N -Term verwendet (mit $\bar{m}_q = (m_u + m_d)/2$):^{1,2}

$$\sigma_N = \bar{m}_q \frac{\partial M_N}{\partial \bar{m}_q} = \frac{m_\pi}{2} \frac{\partial M_N}{\partial \bar{m}_\pi}. \quad (7.2)$$

Dieser σ_N -Term beschreibt den Teil der Nukleonmasse M_N , welcher durch die explizite Symmetriebrechung, d.h. durch endliche Quarkmassen erzeugt wird. Sein empirischer Wert aus der Analyse von πN -Streudaten beträgt $\sigma_N = (45 \pm 8)$ MeV (siehe [54]).

Gl. (7.1) macht deutlich, dass das chirale Kondensat neben der Pionmasse auch von anderen Niederenergiekonstanten, wie g_A und f_π , abhängt. Durch die explizite Symmetriebrechung hängen diese jedoch auch von den Quarkmassen bzw. der Pionmasse ab. Die entsprechenden Zusammenhänge sind nur sehr ungenau bekannt und wir berücksichtigen diese impliziten Abhängigkeiten von der Pionmasse bzw. den Quarkmassen im Folgenden nicht.

¹Gelegentlich findet man in Gl. (7.1) die skalare Dichte ρ_s statt ρ im Koeffizienten von σ_N . In führender Ordnung der Dichte stimmen diese aber überein.

²Für die Nukleonmasse stimmt die totale Ableitung mit der partiellen Ableitung nach m_π überein. Vgl. die Fußnote hierzu in Abschnitt 2.4.

Die totale Ableitung der Energie pro Teilchen nach der Pionmasse beinhaltet dann zum einen die partielle Ableitung nach der explizit in den Einzelbeiträgen auftretenden Pionmasse. Zum anderen muss durch die Abhängigkeit des kinetischen Beitrags bzw. des iterierten Ein-Pion-Austausches von der Nukleonmasse M_N auch der σ_N -Term nochmals beachtet werden.

Betrachtet man Gl. (7.1) nur bis zum führenden Term proportional zu σ_N , so nimmt das chirale Kondensat linear in der Nukleonendichte ab, bis es bei ca. $3\rho_0$ verschwindet (Restauration der chiralen Symmetrie). Die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie hat große Konsequenzen für die Anwendbarkeit von chiraler Störungstheorie: Wenn das chirale Kondensat verschwindet gibt es keine Goldstonebosonen (Pionen) mehr. All unsere Überlegungen haben spätestens ab der zugehörigen Dichte also keinen Sinn mehr.

Durch die Hinzunahme der nächsten Terme erwartet man einen leicht gegenläufigen Trend zur linearen Abnahme des Kondensats in der Dichte, so dass die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie erst bei höheren Dichten erfolgen sollte (z.B. bei etwa $4\rho_0$ in [55], siehe auch [53]).

Dies wollen wir nun explizit für unsere Rechnungen überprüfen. Die Einzelbeiträge zur Energie pro Teilchen in isospin-symmetrischer Kernmaterie sind aus Abschnitt 4.4 bekannt. Wir wählen wieder die Monopolmasse $\Lambda_0 = 1.15 \text{ GeV}$, für die wir keine Kontaktterme zur Reproduktion der Zustandsgleichung von isospin-symmetrischer Kernmaterie benötigt haben. Durch diese zunächst einfach erscheinende Wahl umgehen wir jedoch nicht das grundsätzliche Problem, dass wir keine Kenntnis über die Abhängigkeit der Kontaktterme von der Pionmasse m_π bzw. von den Quarkmassen besitzen. Der Zusammenhang $B_3(\Lambda_0) = B_5(\Lambda_0) = 0$ bedingt nämlich keinesfalls, dass auch die Ableitungen von $B_3(\Lambda_0)$ und $B_5(\Lambda_0)$ nach der Quarkmasse verschwinden. Betrachtet man beispielsweise das Walecka-Modell mit dem Austausch von σ - und ω -Mesonen (vgl. z.B. Kap. 10 in [56]), so lässt sich $B_3 \propto -\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} + \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2}$ zuordnen. Für die Mesonenmassen gelten Zusammenhänge der Form $m_\sigma = m_\sigma^0 + c_\sigma \bar{m}_q$ und $m_\omega = m_\omega^0 + c_\omega \bar{m}_q$, wobei $m_{\sigma/\omega}^0$ die Massen im chiralen Limes bezeichnen. Im Allgemeinen gilt $c_\sigma \neq 0$, $c_\omega \neq 0$ und damit $\frac{dB_3}{d\bar{m}_q} \neq 0$, selbst wenn $B_3 = 0$. Der Einfluss der Kontaktterme auf das chirale Kondensat stellt also ein Problem dar, da wir ihn nicht abschätzen können und deswegen vernachlässigen müssen. Im Folgenden ist es deshalb lediglich möglich, den Einfluss der expliziten Piondynamik *ohne* den der Kontaktterme zu untersuchen. Zudem erzeugt die Unsicherheit des σ_N -Terms ein entsprechendes Fehlerband für die Dichteabhängigkeit des chiralen Kondensats. Eine präzise Aussage über diese können wir also nicht treffen.

Da die Reichweite einer Wechselwirkung indirekt proportional zur Masse des Austauschteilchens ist, prognostiziert man intuitiv für eine wachsende Pionmasse eine schwächere Wechselwirkung. Für einen positiven, also repulsiven Energiebeitrag \bar{E}_i sollte sich demnach weniger Repulsion, d.h. $\frac{\partial \bar{E}_i}{\partial m_\pi} < 0$, ergeben und für einen negativen, d.h. attraktiven Beitrag sollte sich weniger Attraktion, d.h. $\frac{\partial \bar{E}_i}{\partial m_\pi} > 0$, herausstellen ($i \in \{0, \dots, 8\}$). In Tabelle 7.1 sind die entsprechenden Resultate aus unseren Rechnungen an der Sättigungs-

dichte $\rho_0 = 0.158 \text{ fm}^{-3}$ ($k_f = 262 \text{ MeV}$) gezeigt. Unsere einfache Überlegung funktioniert

Beitrag	\bar{E}_i [MeV]	$\frac{\partial \bar{E}_i(k_{f,0}, \Lambda_0)}{\partial m_\pi}$
kin. Energie	21.64	-0.0150
1 π -Austausch	13.63	-0.0503
Iterierter 1 π -Austausch:		
- Hartree mit 2 Med.	-72.86	+0.2455
- Fock mit 2 Med.	-6.41	+0.0024
- Hartree mit 3 Med.	19.06	-0.1227
- Fock mit 3 Med.	-1.46	+0.0107
Irred. 2 π -Austausch	4.63	-0.0295
2 π -Austausch, 3N-Hartree	7.72	-0.0542
2 π -Austausch, 3N-Fock	-2.67	+0.0195
Σ	-16.8	+0.0063

Tabelle 7.1: Partielle Ableitungen der Einzelbeiträge zur Energie pro Teilchen nach m_π .

ihrzufolge für alle Beiträge. Die Tabelle zeigt die dominierende Rolle des iterierten Ein-Pion-Austausches für die Variation des Kondensats auf (insbesondere wieder die des Hartreedigramms mit zwei Medieneinschüben).

Auch der Wert der Ableitung von der Gesamtenergie pro Teilchen an der Sättigungsdichte, $\rho_0 \approx 0.158 \text{ fm}^{-3}$ bzw. $k_{f,0} = 262 \text{ MeV}$, nach der Pionmasse folgt der ersten Intuition und ist mit +0.0063 leicht positiv, wie man es von dem insgesamt attraktiven Term erwarten würde. Bei der Sättigungsdichte finden wir damit für das chirale Kondensat:

$$\frac{\langle \bar{q}q \rangle_{\rho_0}}{\langle \bar{q}q \rangle_0} \approx 0.6453. \quad (7.3)$$

Betrachten wir nun das chirale Kondensat in Abb. 7.1 als Funktion der Dichte im Vergleich zur Dichteabhängigkeit, die nur aus dem führenden Term in σ_N resultiert (siehe Gl. (7.1)). Bis zur Sättigungsdichte stimmen die beiden Kurven sehr gut überein, d.h. die Piondynamik spielt hier kaum eine Rolle in der Variation des Kondensats mit der Dichte. Sie senkt lediglich den Wert des chiralen Kondensats ganz leicht ab. Dies ist auch verständlich, da die Energie pro Teilchen für diese Dichten negativ ist (vgl. Abb. 4.17) und die Attraktion gemäß den obigen, einfachen Überlegungen mit zunehmender Pionmasse abnimmt. Für Dichten größer als die Sättigungsdichte steigt der Einfluss der Piondynamik stark an und sie wirkt der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie entgegen. Es zeigt sich sogar, dass die Piondynamik in unserem Fall jegliche Wiederherstellung der chiralen Symmetrie verhindert.³ Allerdings muss betont werden, dass bei großen Dichten kurzreichweitige Effekte

³Dies ist im Vergleich zu früheren Rechnungen (vgl. [13, 14]) eine deutliche qualitative Veränderung. Mit der dort betrachteten cut-off Regularisierung förderte der Pionaustausch die chirale Restauration sogar schon bei geringeren Dichten als $3\rho_0$. Es ergab sich dort $\frac{\partial \bar{E}}{\partial m_\pi} = +0.338$.

verstärkt hinzukommen und dass die gemachten Aussagen vor allem ohne den Einfluss der Kontaktterme getroffen wurden. Deren Abhängigkeit von der mittleren Quarkmasse könnten die Aussagen sogar noch umdrehen. Unter diesem Gesichtspunkt müssen die diskutierten Ergebnisse deshalb stets sehr vorsichtig betrachtet werden.

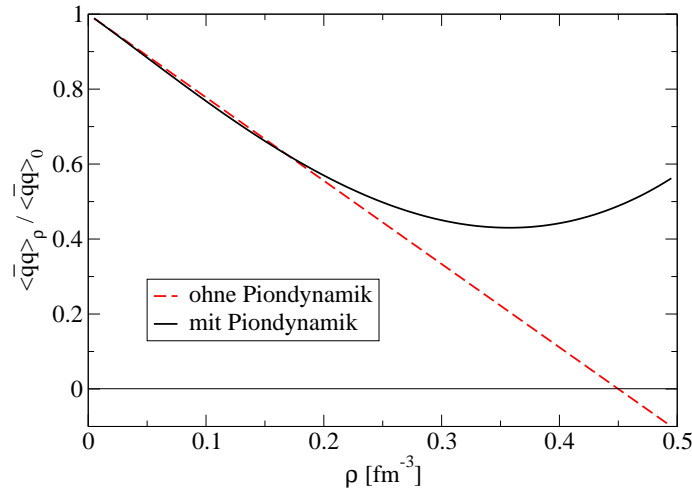


Abbildung 7.1: Dichteabhängigkeit des chiralen Kondensats gemäß Gl. (7.1) - zum einen auf den führenden Term proportional zu σ_N beschränkt, zum anderen inklusive der Piondynamik.

Kapitel 8

Zusammenfassung

Betrachtet man mit der Pionmasse $m_\pi \approx 135 \text{ MeV}$ und dem Fermiimpuls $k_f \simeq 2m_\pi$ die relevanten, kleinen Skalen in Kernmaterie in der Nähe der Sättigung, so wird schnell deutlich, dass die Pionen als leichte, aktive Freiheitsgrade eine große Rolle zur Erklärung der Sättigung spielen. Deshalb wurden in der vorliegenden Diplomarbeit vielversprechende Rechnungen (vgl. [13, 14, 15, 16, 17, 18]) auf der Basis von expliziter chiraler Piondynamik weiterentwickelt.

Neben m_π und k_f stellt auch der Massenunterschied Δ zwischen der $\Delta(1232)$ -Anregung des Nukleons und der Nukleonmasse eine kleine Skala im Vergleich zu den großen Skalen $\Lambda_\chi \simeq 4\pi f_\pi \simeq 1.16 \text{ GeV}$ und $M_N \approx 939 \text{ MeV}$ in Kernmaterie dar. Die betrachtete Störungsreihe entspricht gerade einer Entwicklung in den kleinen Skalen, welche wir bis einschließlich fünfter Ordnung durchgeführt haben. Genauer ausgedrückt, umfassen unsere Rechnungen alle Vakuumdiagramme bis in Drei-Loop-Ordnung, die die Wechselwirkung der Nukleonen über Pion austausch beschreiben. Die Entwicklung zu noch höherer Ordnung zu treiben, wird durch den Schwierigkeitsgrad und die Vielzahl der zugehörigen Diagramme behindert.

Der zentrale Kern dieser Arbeit ist die Ersetzung der früheren cut-off Regularisierung, bei der die hohen Impulskomponenten nicht für alle (divergenten und konvergenten) Beiträge gleich behandelt wurden, durch eine Vertexkorrektur vom Typ eines Monopols: $F(q^2) = \frac{\Lambda^2 - m_\pi^2}{\Lambda^2 - q^2}$ (q : Viererimpuls des Pions). Zunächst wurde der Einfluss der Monopolmasse auf die Einzelbeiträge von isospin-symmetrischer Kernmaterie untersucht (für die Bereiche $450 \text{ MeV} \leq \Lambda \leq 2.7 \text{ GeV}$ der Monopolmasse und $0.005 \text{ fm}^{-3} \leq \rho \leq 0.5 \text{ fm}^{-3}$ der Nukleondichte) und anschließend wurde dieser eine Parameter so auf $\Lambda_0 = 1.15 \text{ GeV}$ festgelegt, dass die gesamte Zustandsgleichung ein Minimum bei $k_{f,0} = 262 \text{ MeV}$ aufweist. Der empirische Sättigungspunkt wird dann sehr gut mit $\bar{E}_0 \approx -16.8 \text{ MeV}$ und der Kompressibilität $\kappa \approx 292 \text{ MeV}$ reproduziert.

In dieser Auswertung wurden keine Kontaktterme zur Parametrisierung von kurzreichweitigen Effekten benötigt. Nachfolgende Betrachtungen zeigten jedoch auf, dass gerade durch die Regularisierung des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches Zweikörper-Kontaktterme proportional zu k_f^3 und k_f^5 notwendig sind. Die zugehörigen Koeffizienten konnten in Abhän-

gigkeit von Λ so angepasst werden, dass die Zustandsgleichung von isospin-symmetrischer Kernmaterie unabhängig von Λ reproduziert wird. Unsere Theorie ist in diesem Sinne renormierbar und eine vielversprechende Verbindung zum universalen niederenergetischen NN-Potential V_{lowk} tut sich auf. Mit Λ_0 hatten wir anfänglich also eine Monopolmasse gefunden, für die die Kontaktterme gerade verschwinden. Weitere Kontaktterme, z.B. Dreikörperterme, wurden nicht benötigt und auch nicht in die Rechnung aufgenommen. Unsere auf die Asymmetrieenergie (für einen kleinen Asymmetrieparameter) und reine Neutronenmaterie ausgedehnten Betrachtungen beinhalten zwei weitere Parameter durch die auch hier nötigen Kontaktterme. Zu deren Fixierung (für die einfache Wahl von Λ_0) wurden zum einen der Sättigungswert der Asymmetrieenergie von $\bar{A}(k_{f,0}) = 33.2 \text{ MeV}$ eingesetzt und zum anderen Vergleichsdaten anderer Gruppen für Neutronenmaterie herangezogen. Der resultierende Kurvenverlauf fällt zwar weder für die Asymmetrieenergie noch für Neutronenmaterie exakt mit empirischen oder berechneten Vergleichskurven zusammen. Die monotone Steigung für wachsende Dichte und der qualitative Verlauf sind jedoch richtig und das Problem besteht hier u.a. auch in fehlenden empirischen Werten, was die Zuverlässigkeit der Vergleichswerte genauso in Frage stellt.

Anschließend befassten wir uns näher mit dem effektiven Einteilchenpotential in isospin-symmetrischer Kernmaterie. Für ein ruhendes Nukleon erhielten wir einen akzeptablen Wert für die Potentialtiefe von $\approx -64.6 \text{ MeV}$. Allerdings sinkt das Potential (für $k_f = 262 \text{ MeV}$) in Abhängigkeit des Nukleonimpulses in der Nähe der Fermikante wieder leicht ab, was dort eine zu große effektive Masse von ca. $1.07M_N$ hervorruft. Dieses Problem könnte durch das Einfügen zusätzlicher, impulsabhängiger Kontaktterme behoben werden. In der Auswertung von isospin-symmetrischer Kernmaterie wurden solche zwar nicht benötigt, aber evtl. spielen sie doch eine gewisse Rolle. Stattdessen könnte man auch den Koeffizienten $B_5(\Lambda)$, der ja dem Term einer vom Impulsquadrat abhängigen Kontaktwechselwirkung zugeordnet ist, etwas anders festlegen. Dazu kann man leicht verschobene, empirische Werte zur Anpassung unserer Rechnungen wählen, wofür ein Spielraum durch die teilweise großen Unsicherheiten besteht. Zudem ist nicht klar, dass die Zweikörperkontaktterme genau bei dem physikalisch nicht ausgezeichneten Wert von Λ_0 verschwinden. Die Zustandsgleichung wird so zwar sehr gut reproduziert, aber es könnte durchaus sein, dass das Verschwinden der Kontaktterme bei einem leicht verschobenen Wert der Monopolmasse noch günstiger ist. Durch die resultierenden kleinen Änderungen, kann sich bereits ein reduzierter und damit besserer Wert für die effektive Nukleonmasse an der Fermikante ergeben.

Zum Abschluss benutzten wir unsere Ergebnisse aus isospin-symmetrischer Kernmaterie noch, um die Abhängigkeit des chiralen Kondensats von der Nukleonendichte zu ermitteln. Es konnte gezeigt werden, dass die Piondynamik bis zur Sättigungsdichte nur einen verschwindenden Einfluss ausübt, d.h. die Dichteabhängigkeit des chiralen Kondensats folgt dem linearen Verlauf des führenden Terms in σ_N . Für große Dichten wirkt die Piondynamik dann der chiralen Restauration entgegen und würde diese sogar verhindern. Allerdings muss hervorgehoben werden, dass wir die Kontaktterme in diese Betrachtungen nicht einbezogen haben, da wir deren Abhängigkeiten von den Quarkmassen nicht kennen. Es könnte aber sein, dass sich durch diesen Einfluss sogar der qualitative Verlauf des chiralen Kondensats als Funktion der Dichte noch ändert - gerade für große Dichten wo kurzreichweitige Effekte

und damit Kontaktterme entscheidender werden.

Zukünftige Überlegungen könnten damit beginnen, unsere Rechnungen auf endliche Temperaturen und inhomogene Kernmaterie (also z.B. endliche Kerne) auszudehnen (hierzu existieren bereits frühere Rechnungen, vgl. [14] und Referenzen dort). Besonders interessant erscheint uns auch ein genauer Vergleich zwischen unserer Methode und dem kurz skizzierten $V_{low k}$ -Ansatz. Für letzteren sollten bald umfassende Ergebnisse aus der perturbativen Behandlung von Kernmaterie unter Berücksichtigung von Dreikörperkorrelationen vorliegen.

Anhang A

Nukleonpropagator im Medium bei der Temperatur $T = 0$

An dieser Stelle wollen wir die Herleitung des Nukleonpropagators im Medium vorführen, die explizit zu Gl. (4.5) führt. Zunächst skizzieren wir dazu die Herleitung des freien Feynman-Propagators für ein Fermion der Masse M_N (siehe z.B. [37, 57, 58]). Die Modifikation durch das Medium lässt sich dann sehr einfach einfügen.

Der Dirac-Propagator ist allgemein definiert als der Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produkts (Vakuumzustand $|0\rangle$, Zeitordnungsoperator \mathcal{T}) zweier Feldoperatoren Ψ an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten x, y :

$$\begin{aligned} S_{F,ab}(x-y) &= \langle 0 | \mathcal{T} \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y) | 0 \rangle \\ &= \Theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y) | 0 \rangle - \Theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \bar{\Psi}_b(y) \Psi_a(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Die allgemeine Wellenfunktion des betrachteten, freien Fermions in der Heisenberg-Darstellung (Ψ_a bezeichne die a -te Komponente, $a \in \{1, 2, 3, 4\}$) ist:

$$\Psi_a(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=1,2} \left(a_{\vec{p}}^s u_a(p, s) e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^{\dagger s} v_a(p, s) e^{ipx} \right). \quad (\text{A.2})$$

Die adjungierte Wellenfunktion $\bar{\Psi}(x)$ ergibt sich als $\bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger \gamma^0$. Für die nullte Komponente des Viererimpulses p gilt $p^0 = E_{\vec{p}}$ und $u(p, s)$ bzw. $v(p, s)$ bezeichnen die vierkomponentigen Diracspinoren von Teilchen bzw. Antiteilchen (sie stellen die Eigenfunktionen der freien Dirac-Gleichung dar; s ist die jeweilige Spineinstellung). Die Normierung wurde wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, s) u(p, s) &= 2M_N \delta^{st}, \\ \bar{v}(p, s) v(p, s) &= -2M_N \delta^{st}. \end{aligned}$$

Ferner beinhaltet Gl. (A.2) mit $a(p)$ den Vernichtungsoperator eines Teilchens (bzw. den Erzeugungsoperator eines Antiteilchens) und mit $b^\dagger(p)$ den Erzeugungsoperator eines Teilchens (bzw. den Vernichtungsoperator eines Antiteilchens). Für diese gelten die Antikommutatorrelationen (die nicht-dargestellten Kombinationen verschwinden):

$$\begin{aligned} \{a_{\vec{p}}^s, a_{\vec{q}}^{\dagger t}\} &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{st}, \\ \{b_{\vec{p}}^t, b_{\vec{q}}^{\dagger s}\} &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{st}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren definieren zudem den Vakuumzustand durch:

$$a_{\vec{p}} |0\rangle = b_{\vec{p}} |0\rangle = \langle 0 | a_{\vec{p}}^\dagger = \langle 0 | b_{\vec{p}}^\dagger = 0. \quad (\text{A.4})$$

Man setzt nun Gl. (A.2) in die Definition des Propagators, Gl. (A.1), ein und erhält mit Gl. (A.4):

$$\begin{aligned} S_{F0,ab}(x-y) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{q}}}} \sum_{s=1,2} \sum_{t=1,2} \left\{ \right. \\ &\quad \langle 0 | a_{\vec{p}}^s a_{\vec{q}}^{\dagger t} | 0 \rangle u_a(p, s) \bar{u}_b(q, t) e^{-i(px-ty)} \Theta(x_0 - y_0) \\ &\quad \left. - \langle 0 | b_{\vec{q}}^t b_{\vec{p}}^{\dagger s} | 0 \rangle \bar{v}_b(q, t) v_a(p, s) e^{i(px-ty)} \Theta(y_0 - x_0) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Die Summe über die Polarisationszustände des Fermions unterliegt der folgenden Vollständigkeitsrelation:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u_a(p, s) \bar{u}_b(p, s) &= \Lambda_{ab}^+(p) = (\not{p} + M_N)_{ab}, \\ \sum_{s=1,2} v_a(p, s) \bar{v}_b(p, s) &= -\Lambda_{ab}^-(p) = (\not{p} - M_N)_{ab}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Damit und mit den Relationen Gl. (A.3) und Gl. (A.4) lässt sich Gl. (A.5) weiter vereinfachen (wobei $p^0 = E_{\vec{p}}$):

$$\begin{aligned} S_{F0,ab}(x-y) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left\{ e^{-ip(x-y)} \Theta(x_0 - y_0) (\not{p} + M_N)_{ab} \right. \\ &\quad \left. - e^{ip(x-y)} \Theta(y_0 - x_0) (\not{p} - M_N)_{ab} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Verwendet man dabei noch die Integraldarstellung der Stufenfunktion:

$$\Theta(\pm(x_0 - y_0)) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{\mp i\omega(x_0 - y_0)}}{\omega + i\epsilon}, \quad (\text{A.8})$$

und definiert die nullte Komponente des Viererimpulses um zu $p^0 \rightarrow p^0 = E_{\vec{p}} + \omega$ (bisher $p^0 = E_{\vec{p}}$), so erhält man schließlich mit infinitesimalem ϵ den freien Dirac-Propagator in

Ortsdarstellung:

$$\begin{aligned}
S_{F0}(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{2E_{\vec{p}}} \left\{ e^{-ip(x-y)} \frac{E_{\vec{p}} \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + M_N}{p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + e^{ip(x-y)} \frac{-E_{\vec{p}} \gamma^0 + \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + M_N}{p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon} \right\} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} i \underbrace{\frac{\not{p} + M_N}{p^2 - M_N^2 + i\epsilon}}_{S_{F0}(p)}. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dabei für den zweiten Summanden in der ersten Zeile noch die Transformation $p \rightarrow -p$ durchgeführt.

Um nun den Propagator für ein Nukleon **im Medium** (bei $T = 0$) herzuleiten, muss man nur die Wellenfunktion so modifizieren, dass die Anwesenheit des gefüllten Fermisees berücksichtigt wird. Dies geschieht einfach durch eine Unterscheidung zwischen Impulsen oberhalb und unterhalb der Fermikante k_f : Für $|\vec{p}| < k_f$ kann ein Teilchen mit diesem Impuls aus dem Fermisee entnommen werden, d.h. die Vernichtung eines Teilchens bzw. die Erzeugung eines Lochs ist möglich. Für $|\vec{p}| > k_f$ kann dagegen nur ein Teilchen mit diesem Impuls erzeugt bzw. ein Loch vernichtet werden. Für die beiden Fälle sind Vernichtungs- gegen Erzeugungsoperatoren auszutauschen und umgekehrt, und man erhält für die Wellenfunktion allgemein:

$$\begin{aligned}
\Psi_a(x) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left\{ \left(a_{\vec{p}}^s u_a^s(p) e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^{\dagger s} v_a^s(p) e^{ipx} \right) \Theta(|\vec{p}| - k_f) \right. \\
&\quad \left. + \left(a_{\vec{p}}^{\dagger s} u_a^s(p) e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^s v_a^s(p) e^{ipx} \right) \Theta(k_f - |\vec{p}|) \right\} \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Für $k_f \rightarrow 0$ geht dieser Feldoperator in seine freie Form aus Gl. (A.2) über. $\Psi(x)$ setzt man nun ganz analog zur Herleitung des freien Propagators in die allgemeine Definition, Gl. (A.1) ein und bekommt unter Zuhilfenahme der Antikommutatoren, Gl. (A.3), und der Projektoren, Gl. (A.6):

$$\begin{aligned}
S_{F,ab}(x-y) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left\{ \Theta(|\vec{p}| - k_f) \right. \\
&\quad \cdot \left[e^{-ip(x-y)} \Theta(x_0 - y_0) (\not{p} + M_N)_{ab} - e^{ip(x-y)} \Theta(y_0 - x_0) (\not{p} - M_N)_{ab} \right] \\
&\quad + \Theta(k_f - |\vec{p}|) \tag{A.11} \\
&\quad \cdot \left[e^{ip(x-y)} \Theta(x_0 - y_0) (\not{p} - M_N)_{ab} - e^{-ip(x-y)} \Theta(y_0 - x_0) (\not{p} + M_N)_{ab} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt schreibt man wieder die Stufenfunktionen, die die nullten Komponenten beinhalten, in Integraldarstellung um und definiert geeignet $p^0 \rightarrow p^0 = E_{\vec{p}} + \omega$ bzw.

$p^0 \rightarrow p^0 = E_{\vec{p}} - \omega$ um (bisher: $p^0 = E_{\vec{p}}$):

$$\begin{aligned}
S_{F,ab}(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{2E_{\vec{p}}} \left\{ \Theta(|\vec{p}| - k_f) \right. \\
&\quad \cdot \left[e^{-ip(x-y)} \frac{(E_{\vec{p}} \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + M_N)_{ab}}{p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon} + e^{ip(x-y)} \frac{(-E_{\vec{p}} \gamma^0 + \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + M_N)_{ab}}{p^0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon} \right] \\
&\quad + \Theta(k_f - |\vec{p}|) \\
&\quad \cdot \left[e^{ip(x-y)} \frac{(E_{\vec{p}} \gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_N)_{ab}}{-p^0 + E_{\vec{p}} + i\epsilon} + e^{-ip(x-y)} \frac{(-E_{\vec{p}} \gamma^0 + \vec{p} \cdot \vec{\gamma} - M_N)_{ab}}{-p^0 + E_{\vec{p}} + i\epsilon} \right] \left. \right\}. \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Führt man im zweiten und dritten Summanden die Transformation $p \rightarrow -p$ durch, so erhält man nach kurzer Vereinfachung (ϵ infinitesimal):

$$\begin{aligned}
S_{F,ab}(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} i (\not{p} + M_N)_{ab} \left\{ \frac{\Theta(|\vec{p}| - k_f)}{p^2 - M_N^2 + i\epsilon} + \frac{\Theta(k_f - |\vec{p}|)}{p^2 - M_N^2 - i\epsilon} \right\} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} i (\not{p} + M_N)_{ab} \left\{ \frac{1}{p^2 - M_N^2 + i\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + \Theta(k_f - |\vec{p}|) \left(\frac{1}{p^2 - M_N^2 - i\epsilon} - \frac{1}{p^2 - M_N^2 + i\epsilon} \right) \right\}. \tag{A.13}
\end{aligned}$$

Für $\epsilon \rightarrow 0$ lässt sich die letzte Klammer als δ -Distribution darstellen:

$$\frac{1}{p^2 - M_N^2 - i\epsilon} - \frac{1}{p^2 - M_N^2 + i\epsilon} = 2\pi i \delta(p^2 - M_N^2). \tag{A.14}$$

Diese δ -Distribution zwingt das betrachtete Nukleon auf die Massenschale, d.h. $p_0^2 = E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + M_N^2$. Unsere Definitionen sind so ausgelegt, dass die Energien stets positiv gezählt werden, und wir müssen dies durch einen zusätzlichen Faktor $\Theta(p_0)$ weiterhin sicherstellen. Schließlich erhält man so die in den Rechnungen verwendete Form aus Gl. (4.5):

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ i \frac{\not{p} + M_N}{p^2 - M_N^2 + i\epsilon} - 2\pi (\not{p} + M_N) \delta(p^2 - M_N^2) \Theta(k_f - |\vec{p}|) \Theta(p_0) \right\}. \tag{A.15}$$

Anhang B

Hilfsformeln zur Integration über zwei Fermikugeln

In den Berechnungen der einzelnen Diagramme taucht durch die Medieneinschübe sehr häufig das folgende, sechsfache Integral über zwei Fermikugeln auf:

$$\mathcal{A}(k_1, k_2) = \int \frac{d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^6} \Theta(k_1 - |\vec{p}_1|) \Theta(k_2 - |\vec{p}_2|) F(|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|). \quad (\text{B.1})$$

Hierfür lassen sich einige Formeln zur Vereinfachung entwickeln, die wir im Folgenden anführen.

Für **gleiche Radien** $k_1 = k_2 = k$ der beiden Fermikugeln gilt (vgl. [13]):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k, k) &= \frac{k^6}{3\pi^4} \int_0^1 dx x^2(1-x)^2(2+x)F(2xk) \\ &= \frac{k_f^6}{3\pi^4} \int_0^1 dx \left[x^2(1-x)^2(2+x)F(2xk_f) \right. \\ &\quad \left. \pm 2(1-x)x^2F(2xk_f)\delta + \frac{x^3}{3}F(2xk_f)\delta^2 \right] + \mathcal{O}(\delta^3). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Dabei beziehen sich die letzten beiden Zeilen konkret auf den Fall $k_1 = k_2 = k = k_f(1 \pm \delta)^{1/3}$, der bis zur Ordnung in δ^2 entwickelt wurde. Diese Darstellung ist für die Berechnung der Asymmetrieenergie in Kap. 5 oft von Vorteil.

Das Integral in Gl. (B.1) lässt sich aber auch noch allgemeiner für zwei verschiedene Radien der Fermikugeln vereinfachen. Mit $r := \frac{|k_1 - k_2|}{k_1 + k_2}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k_1, k_2) &= \frac{(k_1 + k_2)^6}{192\pi^4} \int_0^1 dx \left\{ \left[2r^3(1-r)^3x^2 - r^2(1-rx)^2(r^2x^2 + 2rx - 3r^2)x \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot F(|k_1 - k_2|x) + x(1-x)^2(x^2 + 2x - 3r^2)F(x(k_1 + k_2)) \right\} \\ &= \frac{k_f^6}{3\pi^4} \int_0^1 dx \left[x^2(1-x)^2(2+x)F(2xk_f) + \frac{x}{3}(x^2 - 1)F(2xk_f)\delta^2 \right] + \mathcal{O}(\delta^4). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

In der letzten Zeile wurden, wiederum günstig für Betrachtungen der Asymmetrieenergie, die beiden Radien zu $k_1 = k_f(1 + \delta)^{1/3}$ und $k_2 = k_f(1 - \delta)^{1/3}$ (oder umgekehrt) gewählt und der Term bis in δ^2 entwickelt.

Anhang C

Ein-Pion-Austausch in isospin-symmetrischer Kernmaterie

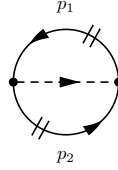


Abbildung C.1: Fockdiagramm des Ein-Pion-Austausches mit zwei Me-dieneinschüben.

Nun wollen wir exemplarisch die Berechnung des Fockdiagramms des Ein-Pion-Austausches explizit mit den Feynmanregeln (vgl. Abschnitt 4.1) vorführen. Der Ansatz für die Energiedichte lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \rho \bar{E}_1(k_f, r) = & i \underbrace{(-1)}_{\text{ein Fermion-loop}} \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Sym. faktor 2}} \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^8} \underbrace{\left(\frac{1-r^2}{1 - \frac{(p_1-p_2)^2}{m_\pi^2} r^2} \right)^2}_{\text{Vertexkorrekturen}} \underbrace{\frac{i}{(p_1-p_2)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon}}_{\text{Pionpropagator}} \\
 & \underbrace{\text{Trace}}_{\text{Spin bzw. Isospinspur}} \left\{ \underbrace{\frac{g_A}{2f_\pi} (\not{p}_1 - \not{p}_2) \gamma_5 \tau_a}_{\text{\(\pi NN\)-Vertex links}} \cdot \underbrace{(-2\pi) (\not{p}_1 + M_N) \delta(p_1^2 - M_N^2) \Theta(k_f - |\vec{p}_1|) \Theta(p_1^0)}_{\text{Medieneinschub des Nukleon-Propagators}} \right. \\
 & \left. \cdot \underbrace{\frac{g_A}{2f_\pi} (\not{p}_2 - \not{p}_1) \gamma_5 \tau_a}_{\text{\(\pi NN\)-Vertex rechts}} \cdot \underbrace{(-2\pi) (\not{p}_2 + M_N) \delta(p_2^2 - M_N^2) \Theta(k_f - |\vec{p}_2|) \Theta(p_2^0)}_{\text{Medieneinschub des Nukleon-Propagators}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Mit der Definition $E_i := +\sqrt{M_N^2 + \vec{p}_i^2}$ folgt:

$$\begin{aligned} \rho \bar{E}_1(k_f, r) &= \frac{-i}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^6} \Theta(k_f - |\vec{p}_1|) \Theta(k_f - |\vec{p}_2|) \int_0^\infty dp_1^0 \int_0^\infty dp_2^0 \frac{\delta(p_1^0 - E_1)}{2E_1} \\ &\cdot \frac{\delta(p_1^0 - E_2)}{2E_2} \frac{g_A^2}{4f_\pi^2} \left(\frac{1 - r^2}{1 - \frac{(p_1 - p_2)^2}{m_\pi^2} r^2} \right)^2 \frac{i}{(p_1 - p_2)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \\ &\cdot \text{Trace} \left\{ (\not{p}_1 - \not{p}_2) \gamma_5 (\not{p}_1 + M_N) (\not{p}_2 - \not{p}_1) \gamma_5 (\not{p}_2 + M_N) \right\} \text{Trace} \underbrace{\{ \tau_a \tau_a \}}_{3 \cdot 2}. \end{aligned}$$

Die Integrationen über die nullten Komponenten ist trivial. Führt man nun die nicht-relativistische Entwicklung in $1/M_N$ durch und dividiert durch die Nukleonendichte, so erhält man für die führenden Ordnungen das Zwischenergebnis (mit $x := \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$):

$$\begin{aligned} \bar{E}_1(k_f, r) &= \frac{3g_A^2 m_\pi^3}{(4\pi f_\pi)^2} \int \frac{d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^6} \frac{3\pi^4 (1 - r^2)^2 \Theta(k_f - |\vec{p}_1|) \Theta(k_f - |\vec{p}_2|)}{m_\pi^2 u^3 [m_\pi^2 + (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2] [m_\pi^2 + r^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2]^2} \\ &\left\{ 4(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 - \frac{1}{M_N^2 [m_\pi^2 + (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2] [m_\pi^2 + r^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2]} \right. \\ &\cdot \left[-4|\vec{p}_1| |\vec{p}_2| r^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^4 (-2|\vec{p}_1| |\vec{p}_2| + \vec{p}_1^2 x + \vec{p}_2^2 x) \right. \\ &+ m_\pi^4 (3\vec{p}_1^4 + 2\vec{p}_1^2 \vec{p}_2^2 + 3\vec{p}_2^4 - 4|\vec{p}_1|^3 |\vec{p}_2| x - 4|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|^3 x) \\ &+ m_\pi^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 \cdot [(\vec{p}_1^4 + \vec{p}_2^4)(2 + r^2) + 2\vec{p}_1^2 \vec{p}_2^2 (2 + 3r^2) \\ &\left. \left. - 4|\vec{p}_1|^3 |\vec{p}_2| (1 + r^2)x - 4|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|^3 (1 + r^2)x] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Die Integrationen stellen in diesem Fall kein Problem mehr da und man kann z.B. auch die Integralformel Gl. (B.2) verwenden um das Ergebnis aus Gl. (4.12) mit $u := k_f/m_\pi$ zu erhalten:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1(k_f, r) &= \frac{3g_A^2 m_\pi^3}{(4\pi f_\pi)^2} \left\{ \frac{1}{8u} \left(1 - \frac{3}{r^2} + \frac{2}{r^4} \right) + \arctan(2u) + \frac{1 - 3r^2}{2r^3} \arctan(2ur) \right. \\ &\quad - \frac{1 + 12u^2}{32u^3} \ln(1 + 4u^2) - \frac{2 - 3r^2 + 12r^2(1 - 2r^2)u^2}{32r^6 u^3} \ln(1 + 4u^2 r^2) \\ &+ \frac{m_\pi^2}{40M^2} \left[\frac{1}{2u} + 9u + \frac{3 - 4r^2 + 6r^2(4 - 7r^2)u^2}{2r^6 u} \right. \\ &\quad - (5 + 12u^2) \arctan(2u) + \frac{5(-3 + 5r^2) + 12r^2(-1 + 3r^2)u^2}{2r^5} \arctan(2ur) \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{8u^3} \ln(1 + 4u^2) - \frac{3 - 4r^2}{8r^8 u^3} \ln(1 + 4u^2 r^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Anhang D

Spektralfunktionen beim Zwei-Pion-Austausch

In diesem Teil des Anhangs führen wir alle nicht-verschwindenden Spektralfunktionen auf, die zur Berechnung des irreduziblen Zwei-Pion-Austausches über die Dispersionsdarstellung (vgl. Abschnitt 4.6) benötigt werden. Dabei benutzen wir die Definitionen $\Sigma := 2m_\pi^2 - \mu^2 - 2\Delta^2$ und $\omega := \sqrt{\mu^2 - 4m_\pi^2}$. Die vorgestellten Formeln sind aus den analytischen Ergebnissen in [15] und [40] herleitbar und bereits für das Argument $i\mu$ ausgewertet.

Irreduzibler Zwei-Pion-Austausch mit reinen Nukleon-Zwischenzuständen, vgl. Abb.4.6:

$$\text{Im } W_C(i\mu) = \frac{\omega}{3\pi\mu(4f_\pi)^4} \left[4m_\pi^2(1 + 4g_A^2 - 5g_A^4) + \mu^2(23g_A^4 - 10g_A^2 - 1) - \frac{48g_A^4 m_\pi^4}{\omega^2} \right], \quad (\text{D.1})$$

$$\text{Im } V_T(i\mu) = -\frac{6g_A^4\omega}{\pi\mu(4f_\pi)^4}. \quad (\text{D.2})$$

Das ‘‘Dreiecks’’-Diagramm der Nukleon-Nukleon Streuung mit einem Δ im Zwischenzustand (in Abb. 4.7 links) trägt nur einen nicht-verschwindenden Term bei:

$$\text{Im } W_C(i\mu) = \frac{g_A^2}{384\pi f_\pi^4 \mu} \left[-(6\Sigma + \omega^2)\omega + 12\Delta\Sigma \arctan \frac{\omega}{2\Delta} \right]. \quad (\text{D.3})$$

Die ‘‘Box’’-Graphen der Nukleon-Nukleon Streuung mit einer virtuellen Δ -Anregung (in Abb. 4.7 Mitte und rechts) liefern:

$$\text{Im } V_C(i\mu) = \frac{3g_A^4}{128f_\pi^4\Delta\mu}(2m_\pi^2 - \mu^2)^2, \quad (\text{D.4})$$

$$\text{Im } W_C(i\mu) = \frac{g_A^4}{384\pi f_\pi^4\mu} \left[-(12\Delta^2 - 20m_\pi^2 + 11\mu^2)\omega + \frac{6\Sigma^2}{\Delta} \arctan \frac{\omega}{2\Delta} \right], \quad (\text{D.5})$$

$$\text{Im } V_T(i\mu) = \frac{1}{\mu^2} \text{Im } V_S(i\mu) = \frac{3g_A^4}{128\pi f_\pi^4\mu} \left[\omega - \frac{\omega^2 + 4\Delta^2}{2\Delta} \arctan \frac{\omega}{2\Delta} \right], \quad (\text{D.6})$$

$$\text{Im } W_T(i\mu) = \frac{1}{\mu^2} \text{Im } W_S(i\mu) = -\frac{g_A^4}{512f_\pi^4\Delta\mu}\omega^2. \quad (\text{D.7})$$

Und die gleichen Diagramme mit zwei Δ -Anregungen in den Zwischenzuständen (vgl. Abb. 4.8) ergeben entsprechend:

$$\text{Im } V_C(i\mu) = \frac{3g_A^4}{128\pi f_\pi^4\mu} \left[4\Delta^2\omega + \Sigma \left(\frac{2\Sigma\omega}{\omega^2 + 4\Delta^2} + \frac{\Sigma + 8\Delta^2}{\Delta} \arctan \frac{\omega}{2\Delta} \right) \right], \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} \text{Im } W_C(i\mu) = \frac{g_A^4}{768\pi f_\pi^4\mu} & \left[-(12\Sigma + \omega^2)\omega \right. \\ & \left. + 3\Sigma \left(\frac{2\Sigma\omega}{\omega^2 + 4\Delta^2} - \frac{\Sigma - 8\Delta^2}{\Delta} \arctan \frac{\omega}{2\Delta} \right) \right], \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

$$\text{Im } V_T(i\mu) = \frac{1}{\mu^2} \text{Im } V_S(i\mu) = \frac{3g_A^4}{512\pi f_\pi^4\mu} \left[-3\omega + \frac{\omega^2 + 12\Delta^2}{2\Delta} \arctan \frac{\omega}{2\Delta} \right], \quad (\text{D.10})$$

$$\text{Im } W_T(i\mu) = \frac{1}{\mu^2} \text{Im } W_S(i\mu) = \frac{g_A^4}{1024\pi f_\pi^4\mu} \left[-\omega - \frac{\omega^2 - 4\Delta^2}{2\Delta} \arctan \frac{\omega}{2\Delta} \right]. \quad (\text{D.11})$$

Literaturverzeichnis

- [1] R.B. Wiringa, V.G.J. Stoks, R. Schiavilla, *Phys. Rev. C* **51** (1995) 38-51
- [2] R. Machleidt, *Phys. Rev. C* **63** (2001) 024001
- [3] P. Ring, P. Schuck, "The nuclear many-body problem", Springer Verlag (1980)
- [4] S.K. Bogner, A. Schwenk, R.J. Furnstahl and A. Nogga, *Nucl. Phys. A* **763** (2005) 59-79
- [5] S.K. Bogner, T.T.S. Kuo, A. Schwenk, D.R. Entem and R. Machleidt, *Phys. Lett. B* **576** (2003) 265-272
- [6] A. Schwenk, *J. Phys. G* **31** (2005) 1273-1282
- [7] A. Nogga, S. Bogner, A. Schwenk, *Phys. Rev. C* **70** (2004) 061002
- [8] S.K. Bogner, T.T.S. Kuo, A. Schwenk, *Phys. Rept.* **386** (2003) 1-27
- [9] A. Schwenk, A.P. Zuker, *e-print nucl-th/0501038* (2005)
- [10] A. Schwenk, *e-print nucl-th/0411070* (2004)
- [11] S.K. Bogner, A. Schwenk, T.T.S. Kuo, and G.E. Brown, *e-print nucl-th/0111042* (2001)
- [12] A. Schwenk, B. Friman, S.K. Bogner, G.E. Brown, and T.T.S. Kuo, *Acta Phys. Slov.* **52** (2002) 207-214
- [13] S. Fritsch, "Chirale Dynamik und Kernmaterie", Diplomarbeit, 2001
- [14] S. Fritsch, "Chiral Dynamics and the Nuclear Many-Body Problem", Doktorarbeit, 2004
- [15] S. Fritsch, N. Kaiser, W. Weise, *Nucl. Phys. A* **750** (2005) 259-293
- [16] N. Kaiser, S. Fritsch, W. Weise, *Nucl. Phys. A* **700** (2002) 343-358
- [17] N. Kaiser, S. Fritsch, W. Weise, *Nucl. Phys. A* **697** (2002) 255-276

- [18] N. Kaiser, W. Weise, *e-print* nucl-th/0109052 (2001)
- [19] M. Lutz, B. Friman, Ch. Appel, *Phys. Lett B* **474** (2000) 7-14
- [20] M. Lutz, *Nucl. Phys. A* **642** (1998) 171-177
- [21] W. Weise, *e-print* hep-ph/0504087 (2005)
- [22] W. Weise, *Nucl. Phys. A* **751** (2005) 565-582
- [23] D. Vretenar, W. Weise, *Lect. Notes Phys.* **641** (2004) 65-117
- [24] A.W. Thomas, W. Weise, "The Structure of the Nucleon", Wiley-VCH (2001)
- [25] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, "Teilchen und Kerne", Springer Verlag, 5. Auflage (2001)
- [26] T. Mayer-Kuckuck, "Kernphysik", Verlag Teubner, 7. Auflage (2002)
- [27] D.N. Basu, P.R. Chowdhury, *e-print* nucl-th/0408013 (2004)
- [28] R. Brockmann, R. Machleidt, *Phys. Rev. C* **42** (1990) 1965-1980
- [29] D. Durand, E. Suraud, B. Tamain, "Nuclear Dynamics in the nucleonic regime", Institute of Physics Publishing, Bristol USA (2001)
- [30] D. Vretenar, T. Niksic, P. Ring, *Phys. Rev. C* **68** (2003) 024310
- [31] Particle Data Group, web-Seite <http://pdg.lbl.gov>
- [32] V. Bernard, N. Kaiser, Ulf-G. Meißner, *Int. J. Mod. Phys. E* **4** (1995) 193-346
- [33] J. Gasser, H. Leutwyler, *Nucl. Phys. B* **250** (1985) 465-539
- [34] B.R. Holstein, *e-print* hep-ph/9510344
- [35] N. Kaiser, R. Brockmann and W. Weise, *Nucl. Phys. A* **625** (1997) 758-788
- [36] S.R. Beane, P.F. Bedaque, W.C. Haxton, D.R. Phillips, M.J. Savage, *e-print* nucl-th/0008064 (2002)
- [37] M. Peskin, D. Schroeder, "Introduction to quantum field theory", Westview Press (1995)
- [38] T. Ericson, W. Weise, "Pions and Nuclei", Oxford University Press (1988)
- [39] R.A. Arndt, I.I. Strakovsky, R.L. Workman, M.M. Pavan, *Phys. Scripta T* **87** (2000) 62-64
- [40] N. Kaiser, S. Gerstendörfer, W. Weise, *Nucl. Phys. A* **637** (1998) 395-420

- [41] S. Fritsch, N. Kaiser, *Eur. Phys. J.* **A17** (2003) 11-18
- [42] P.A. Seeger, W. M. Howard, *Nucl. Phys.* **A 238** (1975) 491-532
- [43] E.N.E. van Dalen, C. Fuchs, Amand Faessler, *Nucl. Phys.* **A 744** (2004) 227-248
- [44] D.N. Basu, P. Roy Chowdhury, C. Samanta, *e-print nucl-th/0601098* (2006)
- [45] A. Akmal, V.R. Pandharipande, D.G. Ravenhall, *Phys. Rev. C* **58** (1998) 1804-1828
- [46] J. Carlson, *Phys. Rev. C* **68** (2003) 025802
- [47] J. Shamanna, T.T.S. Kuo, I. Bombaci, Subhankar Ray, *e-print nucl-th/0509014* (2005)
- [48] W. Zuo, I. Bombaci, U. Lombardo, *Phys. Rev. C* **60** (1999) 024605
- [49] G.Q. Li, R. Machleidt, R. Brockmann, *Phys. Rev. C* **45** (1992) 2782-2794
- [50] P. Grange, J.P. Cugnon, A. Lejeune, *Nucl. Phys.* **A 473** (1987) 365-393
- [51] H. Nakada, *Phys. Rev. C* **68** (2003) 0,14316
- [52] M. Jaminon, C. Mahaux, *Phys. Rev. C* **40** (1989) 354-367;
M. Brack, C. Guet, H.B. Hakansson, *Phys. Rep.* **123** (1985) 275-364
- [53] R. Brockmann, W. Weise, *Phys. Lett.* **B 367** (1996) 40-44
- [54] J. Gasser, H. Leutwyler, M.E. Sainio, *Phys. Lett.* **B 253** (1991) 252-259
- [55] G.X. Peng, *Nucl. Phys.* **A 747** (2005) 75-83
- [56] J.I. Kapusta, "Finite-temperature field theory", Cambridge University Press (1989)
- [57] J.D. Bjorken, S.D. Drell, "Relativistische Quantenmechanik", Spektrum, Akademischer Verlag (1998);
J.D. Bjorken, S.D. Drell, "Relativistische Quantenfeldtheorie", BI-Wissenschafts-Verlag, Hochschultaschenbuch Band 101 (1993)
- [58] W. Greiner, J. Reinhardt, Theoretische Physik Band 7A "Feldquantisierung", 1.Auflage, Verlag Harri Deutsch (1993);
W. Greiner, J. Reinhardt, Theoretische Physik Band 7 "Quantenelektrodynamik", 2.Auflage, Verlag Harri Deutsch (1995)

Dank

An letzter und entscheidender Stelle möchte ich all denjenigen danken, die mich bei und während meiner Arbeit stets unterstützt haben.

Besonders hervorheben möchte ich dabei selbstverständlich Prof. Dr. Wolfram Weise, der mir an seinem Lehrstuhl die Möglichkeit zu meiner Arbeit gegeben und immer sehr hilfreiche und anregende Diskussionen angestoßen hat.

Ebenso möchte ich meinem Betreuer Norbert Kaiser herzlich danken, der stets ein offenes Ohr für mich hatte und zum “Knacken” von größeren Schwierigkeiten unentbehrlich war.

Ferner danke ich der gesamten T39-Gruppe für das nette Klima am Lehrstuhl und die gemeinsame Ausdauer bei zahlreichen Seminaren.

Und ein sehr großer Dank gilt schließlich meinen Eltern, meinem Bruder Wolfgang und meinem Freund Jakob, die meine Stimmungen immer geduldig ertragen und mich stets motiviert haben.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Garching, März 2006

Monika Mühlbauer